Academia Bravosol – Sistemas Personalizados de Enseñanza®
Entidad Gestora de la UNED especializada en preparación de la PCE
Calle Sagasta, 4. Metro Bilbao.
910 646 842 – 689 798 987 – info@bravosol.net
www.bravosol.net

PRUEBAS DE COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Matemáticas II – Mayo de 2019

NOTAS ACLARATORIAS: El examen consta de 10 cuestiones tipo test y 2 problemas. Cada cuestión vale 0,5 puntos y cada problema vale 2,5 puntos. Las cuestiones erróneas restan 0,15 puntos. Las cuestiones se encuentran traducidas al inglés al final del examen. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

CUESTIONES

1.- Si u = (0,3,5) y v = (1,-2,2) entonces el producto vectorial de ambos es:

a) **uxv** = (1,5,-3)

b) **uxv** = (11,5,-3)

c) **uxv** = (1,5,3)

2. El punto P' simétrico del punto P(1,0,1) respecto de la recta

r: (x,y,z) = (1,0,0) + λ(0,1,1)

a) P'(1,1,1)

b) P'(1,1,0)

c) P'(-1,1,-1)

3. La distancia del punto P(4,6,0) al plano es:

π: 2x-y+2z+1=0

a) 1

b) 2

c) 3

4. Dado el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi: x+2y-z=2 \qquad \boldsymbol{r}: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4}$$

se verifica que:

a) La recta es paralela al plano y no se cortan

b) Se cortan en un punto

c) La recta esta contenida en el plano

5.- La ecuación del plano que es ortogonal a la recta y pasa por el punto P(1,1,1) es:

r: x = y-1= z

a) x+y+z = 3

b) x-y+z = 1

c) x+y+z = 1

6.- El valor del siguiente límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{n^2+3}$$

a) 3

b) No existe

c) Infinito

7.- Sea la matriz 3x3 tal que:

$$A^3 = -I$$

a) $A^{10} = A$

b) $A^{10} = -A$

c) $A^{10} = I$

8. Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B, con probabilidades:

$$p(A) = \frac{4}{9} \qquad p(B) = \frac{1}{3} \qquad p(AUB) = \frac{2}{3}$$

a) p(AIB) = 4/9

b) p(AIB) = 2/9

c) p(AIB) = 1/3

9. En una bolsa hay 10 bolas rojas, 15 amarillas y 5 azules. Si se extraen dos bolas sin reemplazamiento la probabilidad de que las dos sean rojas es:

a) 3/29

b) 1/3

c) 9/29

10. En una clase de 12 estudiantes se quieren hacer grupos de tres estudiantes para realizar un trabajo. ¿Cuántos grupos distintos se pueden hacer?

a) 13220

b) 660

c) 220

PROBLEMAS

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

a) (0,25 puntos) Calcule el dominio y los puntos de continuidad

b) (1 punto) Estudiar si tiene asíntotas

c) (0,5 puntos) Estudie el crecimiento y los extremos relativos

d) (0,75 puntos) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de f(x)

Solución

a) Al tratarse de una función racional el dominio viene definido por todos los valores de R excepto los que anulan el denominador. **D** = **R** – {-1}

b) Debemos estudiar:

- *Asíntotas verticales*: $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3}{x+1} = +\infty$

Por lo tanto si hay asíntota y su ecuación es x = -1

- *Asíntotas horizontales*: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \to \text{L'Hôpital} \to \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{\infty}{-\infty} \to \text{L'Hôpital} \to \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{1} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay horizontales.

- *Asíntotas oblicuas*: Simplificamos los cálculos calculando solo la asíntota para mas infinito puesto que se obtendrá las mismas asíntotas en este caso

m: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x+1} : \frac{x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} \to \text{L'Hôpital} \to \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{2} = 1$

n: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x+1} - \mathrm{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3-(x(x+1))}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x+3}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \to \text{L'Hôpital} \to -1$

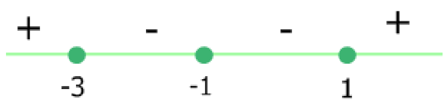
Por lo tanto, tiene asíntota oblicua y su ecuación es y = x -1

c) Para el crecimiento y decrecimiento debemos de realizar la primera derivada e igualamos a cero para sacar los máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0$$

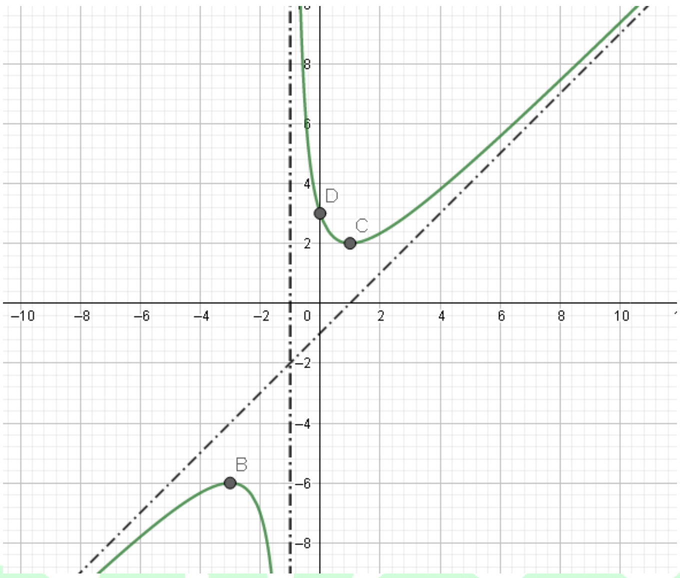
Realizando la ecuación de segundo grado obtenemos x = -3 ; x = 1

Estudiamos el signo de la primera derivada:



Se puede observar que crece desde (-∞,-3) U (1,+∞) y por lo tanto, tiene un máximo en (-3,-6) y un mínimo en (1,2).

d) La gráfica es la siguiente:



Los puntos B y C son puntos críticos. El punto D es el corte con el eje Y. La función esta trazada en verde y sus asíntotas con rectas discontinuas.

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Determine cuantas soluciones tiene dicho sistema en función de los valores del parámetro a

b) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para el valor a = -1

c) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para el valor a = 2

Solución

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Academia Bravosol – Sistemas Personalizados de Enseñanza®
Entidad Gestora de la UNED especializada en preparación de la PCE
Calle Sagasta, 4. Metro Bilbao.
910 646 842 – 689 798 987 – info@bravosol.net
www.bravosol.net

$$|A| = a^2 + a = a(a+1) = 0 \text{ es decir, } a = 0 \text{ ; } a = -1$$

Es decir, para cualquier valor excepto 0 y -1, el rango de A es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, luego el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

- Estudiamos el caso a = 0

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ El rango de A es 2

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ **El rango de la ampliada es 3. El sistema es incompatible, sin solución**

- Estudiamos el caso a = -1

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que todas estas matrices son responsables del rango 3 y todas dan cero. No podemos afirmar que tenga rango 3. De hecho, tiene rango 2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

Al tener la matriz A rango 2 y la ampliada también el sistema formado el compatible indeterminado, por lo que tiene infinitas soluciones.

b) Para el valor a = -1

Podemos optar por múltiples métodos, aquí proponemos uno, aunque existen otros:

Parametrizamos $\boxed{x = \lambda}$ y pasamos al otro miembro, obteniendo un nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{y = -2 + \lambda} \\ y + 2z = \lambda \\ -y - z = 1 - \lambda \end{array}\right\} \text{Podemos resolver z por sustitución}$$

$$-2 + \lambda + 2z = \lambda \rightarrow z = \boxed{1}$$

c) Podemos resolverlo por Cramer:

El determinante de A = 6

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}{6} = 1 \qquad y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}{6} = -1 \qquad z = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{6} = -\frac{1}{2}$$