1. Una matriz contiene un total de 48 coeficientes. Entonces:
   a. Su número de columnas puede ser 18.
   b. Su número de filas puede ser 16.
   c. Ninguna de las anteriores.

2. Para todo par A, B de matrices cuadradas tales que $A \cdot B$ es ortogonal (una matriz es ortogonal si multiplicada por su traspuesta da la identidad), se cumple que:
   a. A y B son ortogonales.
   b. Si A es ortogonal, también B es ortogonal.
   c. Ninguna de las anteriores.

3. Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:
   a. $\det(A) > 0$.
   b. Si A es regular, $A = I$ (la matriz identidad).
   c. Ninguna de las anteriores.

4. Si el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

es compatible indeterminado, entonces, el sistema

$$\begin{cases} ax + cy = b \\ a'x + c'y = b' \end{cases}$$

   a. También es compatible, pero puede que indeterminado.
   b. Es compatible indeterminado.
   c. Ninguna de las anteriores.

5. Para todas A matriz real de dimensión 3x1 y B matriz real de dimensión 1x3, se cumple que:
   a. Rango$(A \cdot B) \geq 2$.
   b. Rango$(A \cdot B) \leq 1$.
   c. Ninguna de las anteriores.

6. Para todo par **u** y **v** de vectores unitarios, se cumple que:
   a. ||**u**-**v**|| ≥ 1.
   b. El producto escalar (**u**+**v**) · (**u**-**v**) = 0.
   c. Ninguna de las anteriores.

7. La distancia del punto (2,1,3) a la recta $x = 2y = 3z$ es:
   a. Mayor que 1

b. Menor que 1
c. Ninguna de las otras dos

8. Si $Ax + By + Cz + D = 0$ es la ecuación del plano que pasa por el punto (2,0,3) y contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$, entonces:
   a. $A \cdot B \cdot C \cdot D > 0.$
   b. $A \cdot B \cdot C \cdot D < 0.$
   c. Ninguna de las otras dos.

9. El límite $L = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$:
   a. Tiene un valor L comprendido entre (1/2, 3/2).
   b. Tiene un valor L comprendido entre (0, 1/2).
   c. Ninguna de las otras dos.

10. Para cada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se cumple que:
   a. Existe $\theta \epsilon (a, b)$ tal que $f(b) = f'(\theta)(b - a)$.
   b. Existe $\theta \epsilon (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$.
   c. Ninguna de las otras dos.

11. La derivada de la función $F(x) = \int_3^x \sqrt{e^t - 1} dt$ es:
   a. $\mathrm{F'(x)} = e^x\sqrt{e^x - 1}.$
   b. $\mathrm{F'(x)} = \sqrt{e^x - 1}.$
   c. Ninguna de las dos.

12. Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?
   a. $0{,}1 < p < 0{,}15.$
   b. $0{,}15 < p < 0{,}2.$
   c. Ninguna de las otras dos.

13. Al cruzar rosas blancas con rosas blancas se obtienen rosas rojas el 25% de las veces. Se cruzan 5 pares de rosas rojas y blancas para obtener 5 brotes. La probabilidad p de que no haya flores rojas entre los brotes cumple:
   a. $0{,}2 \leq p \leq 0{,}3.$
   b. $0{,}3 < p < 0{,}4.$
   c. Ninguna de las otras dos.

14. Una ruleta tiene 38 casillas (18 rojas, 18 negras y 2 verdes). Si se juega 5 veces, apostando siempre al rojo, el número n de veces que se esperaría ganar, cumple:
    a. $2 \leq n \leq 3$.
    b. $1 \leq n \leq 2$.
    c. Ninguna de las otras dos.

15. La cantidad N de números impares que se pueden formar con tres dígitos tomados del conjunto {5, 6, 7, 8, 9}
    a. $70 \leq N \leq 80$.
    b. $60 < N < 70$.
    c. Ninguna de las otras dos.

Opción 1

1. Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = a \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

según los valores de a

Primero se obtienen el vector director de ambas rectas y un punto perteneciente a ellas. Estos datos se pueden extraer de las ecuaciones de las rectas dadas.
El vector director y el punto de la recta r son, respectivamente: **u**=(1,0,2) y P(1,a,-1)
El vector director y el punto de la recta s son, respectivamente: **v**=(1,0,2) y Q(1,0,1)

Posteriormente, se obtiene el vector que une los vectores P y Q: **PQ**=(0,$-a$,2)

Ahora, se calcula el determinante conformado por los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -a & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4a - (-a) = 5a - 2$$

El valor del determinante se iguala a 0 y se obtiene el valor de a para el cual los vectores son coplanarios.

$$5a - 2 = 0; a = -\frac{2}{5}$$

Para valores diferente a $a = -\frac{2}{5}$, las rectas se cruzan.

Cuando $a = -\frac{2}{5}$, existe la posibilidad de que las rectas sean secantes, paralelas o coincidentes. Para poder determinar la posición relativa, hay que comprobar la proporcionalidad de los vectores de las rectas. Como **u** y **v** no son proporcionales, las rectas r y s son secantes cuando $a = -\frac{2}{5}$.

2. Hallar el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Para calcular el dominio hay que igualar el denominador a 0, así se obtienen los valores de x para los cuales la función no está definida

$$x^2 - 4 = 0; x = \pm 2$$

Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

Asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = -2, x = 2$
- Asíntotas horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$$

- Asíntotas oblicuas: no hay ya que hay asíntotas horizontales

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0;\ -2x = 0; x = 0$$

En $x = 0$ hay un extremo relativo. Además, cuando la función se acerca a $x = 0$ por la derecha, el valor de su pendiente es negativo, mientras que si se acerca por la izquierda, el valor de su pendiente es positivo.

Aparte de los extremos relativos, hay que ver cómo es el crecimiento a ambos lados de las asíntotas verticales. Si la función se acerca a $x = -2$ por la derecha, el valor de su pendiente es positivo; mientras que si se acerca por la izquierda, el valor es positivo.

Si la función se acerca a $x = 2$ por la derecha, el valor de su pendiente es negativo; mientras que si se acerca por la izquierda, el valor es negativo.

Por tanto, se concluye que $f(x)$ crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2,0)$ y decrece en el intervalo $(0,2) \cup (2, \infty)$

Opción 2

3. Hallar las matrices A y B que verifican
$$3A+2B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 19\end{pmatrix}, A-B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

Se plantean las siguientes matrices:
$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}$
Se plantean las operaciones correspondientes:
$$3\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 19\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

A partir de lo anterior, se obtiene:
$$\begin{pmatrix}3a+2e & 3b+2f\\ 3c+2g & 3d+2h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 19\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a-e & b-f\\ c-g & d-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

Por la condición de igualdad de matrices, se obtienen las ecuaciones necesarias para hallar cada elemento de las matrices planteadas. Así, las matrices A y B quedan:

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

4. Calcule la siguiente integral:
$$\int\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}dx$$

Para hallar la integral, se realiza un cambio de variable tal que:
$$u=x+1; dx=du$$
La integral queda:
$$\int\frac{u-1}{\sqrt{u}}du$$
Se calcula la integral anterior:
$$\int\frac{u-1}{\sqrt{u}}du=\int\frac{u}{\sqrt{u}}du-\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=\int udu-\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}-2\sqrt{u}$$
$$=\frac{2}{3}u\sqrt{u}-2\sqrt{u}=2\sqrt{u}\cdot\left(\frac{u}{3}-1\right)$$
Se deshace el cambio de variable y se obtiene:
$$\int\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}dx=2\sqrt{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{3}-1\right)=2\sqrt{x+1}\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)=\frac{2\cdot(x-2)\cdot\sqrt{x+1}}{3}+C$$