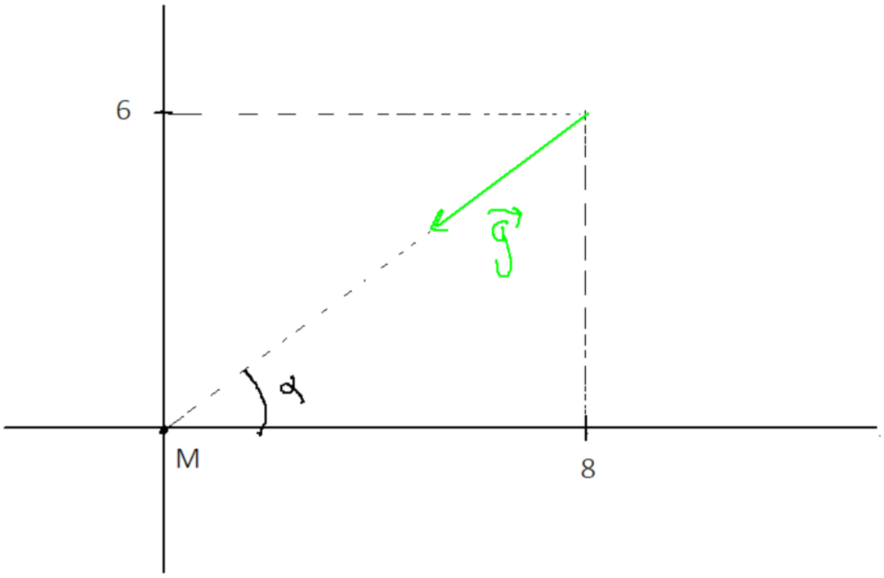
Pregunta A.1.-Una partícula de masa 20 kg permanece fija en el origen de coordenadas

a) Calcule o campo gravitatorio generado por la masa en el punto (8,6) m y la fuerza que experimenta una segunda partícula de masa 3kg situada en dicho punto.
b) Con el objetivo de alejar la segunda partícula se le transmite una velocidad de $1{,}2 \cdot 10^{-5}\ m/s$ en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.

a) Lo primero será dibujar un diagrama de la situación que tenemos:



Por el teorema de Pitágoras, la distancia de la masa al punto (8,6) es:

$$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ m$$

Por ello, el vector campo gravitatorio será:

$$\vec{g} = -g(\cos(\alpha) \cdot \vec{\imath} + sen(\alpha) \cdot \vec{\jmath})$$

Donde $\cos(\alpha) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ y $sen(\alpha) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Así pues,

$$g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow g = 1{,}33 \cdot 10^{-11}\ m/s^2$$

Y el vector,

$$\vec{g} = -1{,}33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{3}{5}\,\vec{\imath} + \frac{4}{5}\,\vec{\jmath}\right) m/s^2$$

Por tanto, la fuerza que experimentará será:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \rightarrow \vec{F} = 3 \cdot \left(-1{,}33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{3}{5}\,\vec{\imath} + \frac{4}{5}\,\vec{\jmath}\right)\right) = -4{,}00 \cdot 10^{-11} \left(\frac{3}{5}\,\vec{\imath} + \frac{4}{5}\,\vec{\jmath}\right) N$$

b) Como la energía mecánica se conserva y la velocidad va en la dirección que une a ambas partículas, la distancia final r_f a la que acabe la partícula será aquella que verifique:

$$E_c + U_0 = U(r = r_f)$$

Por un lado, $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-5})^2 = 2{,}16 \cdot 10^{-10}\, J$. Por el otro, $U_0 = -\frac{GMm}{r}$, $U_0 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{10} = -4{,}00 \cdot 10^{-10}\, J$. Así que:

$$E_c + U_0 = -\frac{GMm}{r_f} \rightarrow r_f = -\frac{GMm}{E_c + U_0}$$

$$r_f = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{2{,}16 \cdot 10^{-10} - 4{,}00 \cdot 10^{-10}} = 21{,}72\, m$$

Como la velocidad iba en la línea que une ambas partículas entonces el vector posición correspondiente al punto más lejano al que llega será:

$$\vec{r_f} = r_f(\cos(\alpha)\,\vec{\imath} + sen(\alpha)\,\vec{\jmath}) = 21{,}72 \left(\frac{4}{5}\,\vec{\imath} + \frac{3}{5}\,\vec{\jmath}\right) m = (17{,}37, 13{,}03)\, m$$

Pregunta A.2.- Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje x viaja una onda armónica que desplaza los elementos de la cuerda en la dirección del eje y. Se sabe que los elementos A y B, respectivamente ubicados $x_A = 0\, m$ y $x_B = 2\, m$, oscilan en fase y cortan al eje x cada 4 s. Teniendo en cuenta que no hay entre A y B ningún otro elemento que oscile en fase con ellos:

a) Calcule el valor de la velocidad de propagación.
b) Escriba la expresión matemática de la onda, si esta viaja en el sentido negativo del eje x y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a +10 cm y velocidad nula.

a) La velocidad de propagación viene dada por $v = \lambda \cdot \nu$ por lo que necesitamos hallar la longitud de onda y la frecuencia de la onda.

Por un lado, tenemos que los puntos A y B están en fase y no hay ningún elemento que oscile en fase entre ellos. Por ello, A y B están separados por una longitud de onda, de forma que la longitud de onda será la distancia que los separa:

$$\lambda = 2\ m$$

Por otro lado, si corta al eje cada 4s es que realiza una oscilación completa cada 8s. Hay que tener en cuenta que un punto pasará dos veces por el eje x en cada oscilación (una de subida y otra de bajada). Por ello, el periodo de esta onda es $T = 8\ s$ y su frecuencia será:

$$\nu = \frac{1}{T} \rightarrow \nu = \frac{1}{8} Hz$$

Por tanto, su velocidad de propagación será:

$$v = \lambda \cdot \nu \rightarrow v = 2 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}25\ m/s$$

b) La expresión matemática de una onda que se propaga en el sentido negativo del eje x es $y(x,t) = A \cdot \cos{(\omega t + kx + \varphi)}$. Como ya sabemos su frecuencia y su longitud de onda ω y k son inmediatas:

$$\omega = 2\pi\nu \rightarrow \omega = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}\ rad/s$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow k = \frac{2\pi}{2} = \pi\ m^{-1}$$

En cuanto a la fase inicial necesitamos comparar con la expresión de la velocidad de oscilación. Para ello, debemos derivar la función de onda con respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega A \cdot sen\ (\omega t + kx + \varphi)$$

Sustituyendo en x = 0 m y t = 0 s vemos que la velocidad es:

$$v(0{,}0) = \ -\omega A\ sen(\varphi)$$

Por lo que si la velocidad es nula entonces $sen(\varphi) = 0$ y hay dos opciones: $\varphi = 0\ rad$ ó $\varphi = \pi\ rad$. Para decidir entre ambas debemos revisar la función de onda en x = 0 m y t = 0 s:

$$y(0{,}0) = Acos(\varphi)$$

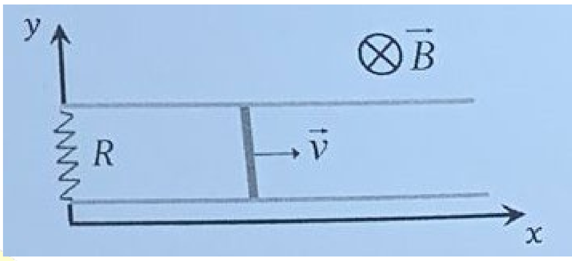
Como se nos dice que en ese punto y en ese instante la elongación es +10 cm entonces el coseno debe ser una cantidad positiva. Por ello, $\varphi = 0\ rad$. Además, si $\varphi = 0\ rad, \cos(\varphi) = 1$ y:

$$y(0{,}0) = A = +10\ cm = 0{,}1\ m$$

Por tanto, la expresión matemática de esta onda es:

$$y(x,t) = 0{,}1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x\right)$$

Pregunta A.3.-La figura representa una varilla metálica de 20 cm de longitud, cuyos extremos deslizan sin rozamiento sobre unos raíles horizontales, paralelos al eje x, metálicos y de resistencia despreciable. La varilla tiene resistencia despreciable y su velocidad es $\vec{v} = 2\,\vec{\imath}\,m/s$ Los raíles están conectados en x=0 por una resistencia de valor $R = 0{,}5\ \Omega$ En la región hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = -0{,}4\,\vec{k}\ T$ Calcule:



a) La intensidad de la corriente en el circuito formado por la varilla, la resistencia y los tramos de rail entre ellas.
b) La fuerza $\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre la varilla

a) El flujo magnético es $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\alpha)$. Por ello, puede depender del tiempo si cambia el campo, la superficie o la inclinación entre ambos. En este caso cambia la superficie porque la varilla se desplaza con una velocidad constante de 2 m/s. Entonces $S = S(t) = L \cdot v \cdot t$, donde L es la longitud de la varilla. Eligiendo el vector superficie apuntando en el sentido positivo del eje z: $\vec{S} = S\ \vec{k}$, el flujo resulta ser:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S(t) \cdot \cos(180°) = -BLvt$$

Por ello, la FEM inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = +BLv$$

De acuerdo con la Ley de Ohm, la FEM y la intensidad de corriente se relacionan mediante:

$$\varepsilon = I \cdot R \to I = \frac{\varepsilon}{R} \to I = \frac{BLv}{R}$$

Por ello, la intensidad de corriente inducida será:

$$I = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 2}{0{,}5} = 0{,}32\ A$$

B) La intensidad de corriente de la varilla irá hacia arriba. Por ello, el campo magnético es perpendicular y ejercerá una fuerza igual a:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

Así pues, la fuerza será:

$$\vec{F} = I \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -ILB\,\vec{\imath}$$

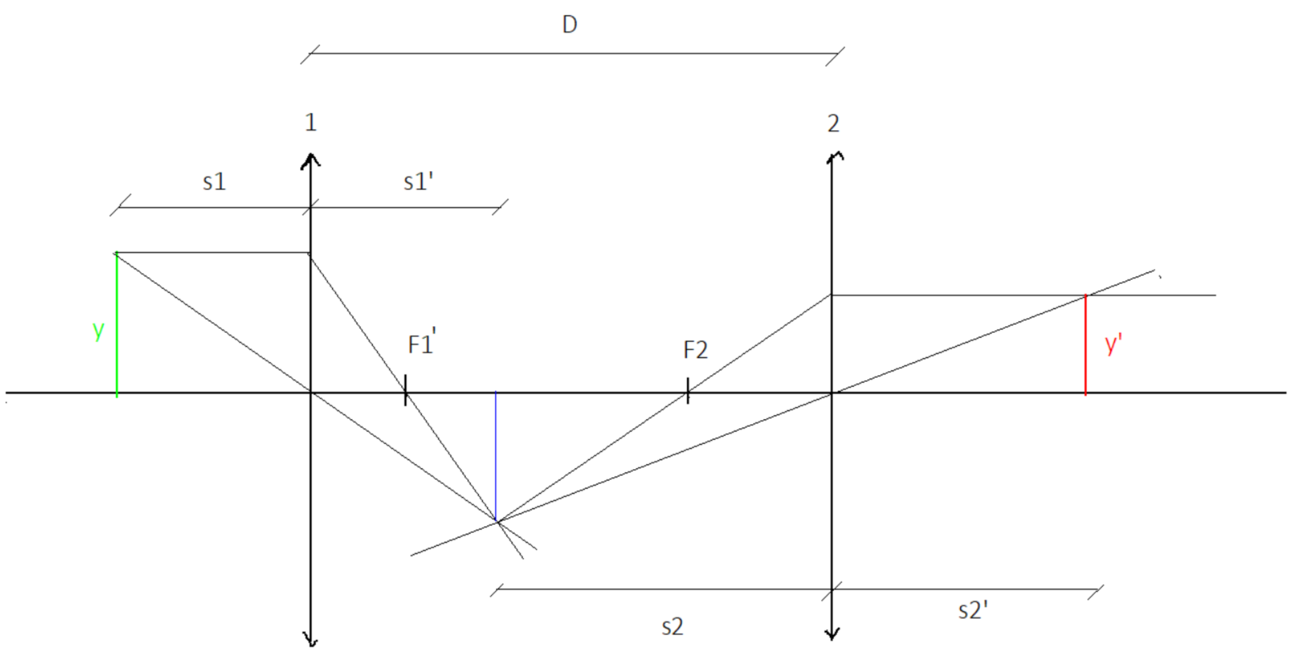
Sustituyendo datos:

$$\vec{F} = -0{,}32 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = -0{,}0256\,\vec{\imath}\,N$$

Pregunta A.4.- Dos lentes convergentes idénticas están separadas 16 cm. Cuando un objeto se sitúa a una cierta distancia a la izquierda de la primera lente, se encuentra que cada una de ellas opera con aumento igual a -1.

a) Determine la potencia de las lentes.
b) ¿Cuánto y hacia donde debe desplazarse la segunda lente para lograr que la imagen sistema se forme en el infinito?

a) Un sistema de dos lentes lo podemos pensar como una lente encadenada detrás de otra, donde la imagen de la primera lente es el objeto de la segunda (ver figura):



El aumento lateral del sistema es el producto de los aumentos laterales de cada lente, por lo que en este caso:

$$M_T = M_{L1} \cdot M_{L2}$$

Puesto que cada una opera con un aumento -1 entonces $M_{L1} = M_{L2} = -1$ y el aumento total es:

$$M_T = (-1)(-1) = +1$$

Por ello, como del aumento lateral es $M_T = y'/y$ significa que el tamaño de la imagen final es el mismo que el tamaño del objeto original. Por ende $y' = y$ y por semejanza de triángulos:

$$s_1 = -s_2{}'$$

Por otro lado, en cada una de las lentes $M_{Li} = s_i'/s_i$, por lo que si el aumento es -1 la distancia objeto e imagen en la lente es $s_i' = -s_i$ $(i = 1, 2)$. Por consiguiente, si sustituimos en la ecuación fundamental de las lentes:

$$\frac{1}{s_i'} - \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_i'} \rightarrow -\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_i'} \rightarrow f_i' = \frac{-s_i}{2}$$

Es decir que las focales de ambas lentes son la mitad de su distancia objeto. Así que para hallar la focal de ambas lentes sólo tenemos que obtener la distancia objeto. Para ello podemos mirar en la figura y vemos que:

$$|s_1'| + |s_2| = D$$

A su vez, como las distancias objeto e imagen son iguales en ambas lentes esta relación es equivalente a:

$$|s_1| + |s_2{}'| = D$$

Y como veíamos que $s_1 = -s_2{}'$ la relación se reduce a:

$$2|s_1| = D \rightarrow s_1 = -\frac{D}{2} = -\frac{16cm}{2} = -8\ cm$$

Y de aquí el resto de las distancias imagen y objeto son inmediatas:

$$s_1' = +8\ cm; s_2 = -8cm\ ; s_2 = +8\ cm$$

Por tanto, las focales de ambas lentes son:

$$f_1 = -\frac{-8cm}{2} = +4\ cm = 0{,}04\ m;\ f_2 = -\frac{-8cm}{2} = +4\ cm = 0{,}04\ m$$

Y sus potencias:

$$P_1 = \frac{1}{f_1{}'} = +25\ D;\ P_2 = \frac{1}{f_2{}'} = +25\ D$$

b) Para que la imagen se forme en el infinito $s_2{}' \to +\infty$ entonces $s_2 = -f_2' = -4\ cm$. Como el objeto no lo hemos movido de sitio entonces s_1 y s_1' siguen siendo $s_1 = -8\ cm$ y $s_1' = +8\ cm$, por lo que, en este caso:

$$|s_1'| + |s_2| = D \to D = 8\ cm + 4\ cm = 12\ cm$$

Por tanto, para formar la imagen en el infinito habrá que acercar la segunda lente 4 cm hacia la izquierda

Pregunta A.5.- Una muestra contiene inicialmente una masa de 30 mg de ^{210}Po. Sabiendo que su período de semidesintegración es de 138,38 días, determine:

a) La vida media del isotopo y la actividad inicial de la muestra.
b) El tiempo que debe transcurrir para que el contenido de ^{210}Po de la muestra se reduzca a 5 mg.

Datos: Masa atómica del ^{210}*Po,* $M_{Po} = 210\ u$ *, Número de Avogadro:* $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

a) La constante radiactiva puede obtenerse a partir del periodo de semidesintegración $T_{1/2} = 138{,}38\ d = 1{,}20 \cdot 10^7 s$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \to \lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \to \lambda = 5{,}79 \cdot 10^{-8} s^{-1} = 5{,}01 \cdot 10^{-3} d^{-1}$$

Entonces, la vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \to \tau = 199{,}64\ d = 1{,}72 \cdot 10^7 s$$

Como la actividad es $A(t) = -dN/dt$ y $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, entonces $A(t) = +\lambda\, N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ y la actividad inicial será $A_0 = \lambda \cdot N_0$. Por ello, para hallar la actividad inicial necesitamos encontrar λ y el número inicial de átomos N_0. Lo primero ya lo tenemos, así que debemos hallar N_0.

Como la masa atómica del Polonio son 210 u entonces por cada 210 g hay un mol de polonio. Así pues, 30 mg= 0,03 g habrá:

$$n = \frac{m}{M_{Po}} \rightarrow n = \frac{0{,}03\ g}{210\ g/mol} = \frac{1}{7000} mol$$

Y multiplicando por el número de Avogadro tendremos el número de átomos:

$$N_0 = n \cdot N_A \rightarrow N_0 = \frac{1}{7000} mol \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23}\ mol^{-1} = 8{,}60 \cdot 10^{19}$$

Por ende, la actividad inicial será:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 \rightarrow A_0 = 4{,}99 \cdot 10^{12}\ s^{-1} = 4{,}99 \cdot 10^{12}\ Bq$$

b) El número de átomos es proporcional a la masa de ellos que tenemos. Por ello, al igual que $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Como conocemos todos los datos excepto el tiempo que hay que esperar para que sólo queden 5mg entonces despejaremos el tiempo de la relación anterior y sustituiremos el resto de datos:

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)}{\lambda} \rightarrow t = \frac{-\ln\left(\frac{0{,}03\ g}{0{,}005\ g}\right)}{5{,}79 \cdot 10^{-8}\ s^{-1}} = 3{,}09 \cdot 10^7 s = 357{,}63\ d \approx 1\ año$$

Pregunta B.1-Marte posee la décima parte de la masa de la Tierra y la mitad de su diámetro.
a) Encuentre la relación entre las velocidades de escape de Marte y de la Tierra desde sus respectivas superficies
b) Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?

Dato: Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$

a) La velocidad de escape puede calcularse mediante la siguiente relación:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si Marte posee la décima parte de la masa de la Tierra $M_M = M_T/10$; si además su diámetro es la mitad del de la Tierra su radio también será la mitad $R_M = R_T/2$. Por ello, sustituyendo en la fórmula anterior la velocidad de escape de Marte será:

$$v_M = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2G\frac{M_T}{10}}{\frac{R_T}{2}}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Por tanto, la velocidad de escape de Marte y la de la Tierra guardan la siguiente relación:

$$v_M = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot v_T$$

b) Dado que la gravedad es una fuerza conservativa, la energía mecánica se conserva. Y en la altura máxima el objeto tiene velocidad 0, por lo que en ese punto sólo tiene energía en forma de energía potencial. Por ello,

$$E_c + U(r = R_T) = U(r = r_{max})$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v_M^2 - \frac{GMm}{R_T} = -\frac{GMm}{r_{max}} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{2GM_T}{5R_T} - \frac{GMm}{R_T} = -\frac{GMm}{r_{max}}$$

m, G y la masa de la Tierra aparecen a ambos lados de la ecuación, por lo que la expresión se reduce a:

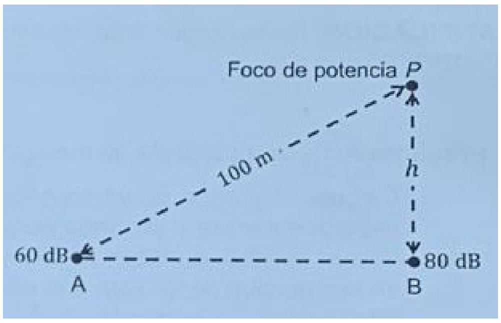
$$\frac{1}{5R_T} - \frac{1}{R_T} = -\frac{1}{r_{max}} \rightarrow r_{max} = \frac{5}{4} \cdot R_T$$

Por otra parte, como el radio es la suma del radio de la Tierra más la altura respecto a la superficie, entonces la altura máxima a la que llegará el objeto es:

$$r_{max} = R_T + h \rightarrow h = r_{max} - R_T$$

$$h = \frac{R_T}{4}$$

Pregunta B.2.- Un foco sonoro de potencia *P* se coloca a una altura *h* sobre el suelo, como ilustra la figura. El nivel de intensidad sonora vale 60 dB en el punto A, a 100 m de distancia del foco, y alcanza 80 dB en el punto B, en el suelo en la vertical del foco.



a) Calcule *P* y *h*
b) ¿Cuál sería el nivel de intensidad en el punto B si se agregase sobre él otro foco de igual potencia a una altura de *h/2*?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

a) La escala viene dada por $\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ así que despejando la intensidad sonora:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}$$

Por ello, 80 dB se corresponden con:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4}\ W\ m^{-2}$$

Y 60 dB se corresponden con:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-6}\ W\ m^{-2}$$

Como $I = \frac{P}{S} \rightarrow P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2$ ya que suponemos que es una onda esférica. Para el punto A

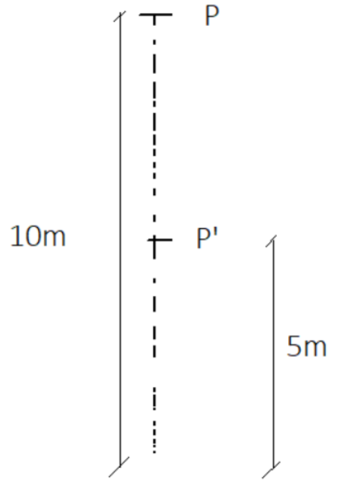
$$P = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot (100^2) = \frac{\pi}{25}\ W$$

Por otro lado, como $P = I \cdot 4\pi r^2$ podemos despejar la distancia en función del resto de variables:

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}}$$

Así pues, en el caso en que r=h, $I = 10^{-4}\ Wm^{-2}$ y vemos que:

$$h = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{25}}{4\pi \cdot 10^{-4}}} = 10\ m$$



b) Si añadimos otro foco, estaremos en la siguiente situación (ver figura). De esta manera, la intensidad total percibida será:

$$I_T = I + I'$$

Donde I' la podemos calcular mediante $I' = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$:

$$I' = \frac{\frac{\pi}{25}}{4\pi \cdot 5^2} = 4 \cdot 10^{-4}\ W \cdot m^{-2}$$

Por ello, $I_T = 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4}\ W\ m^{-2}$

Y, sustituyendo en la definición de la escala decibélica, el nivel de intensidad correspondiente sería:

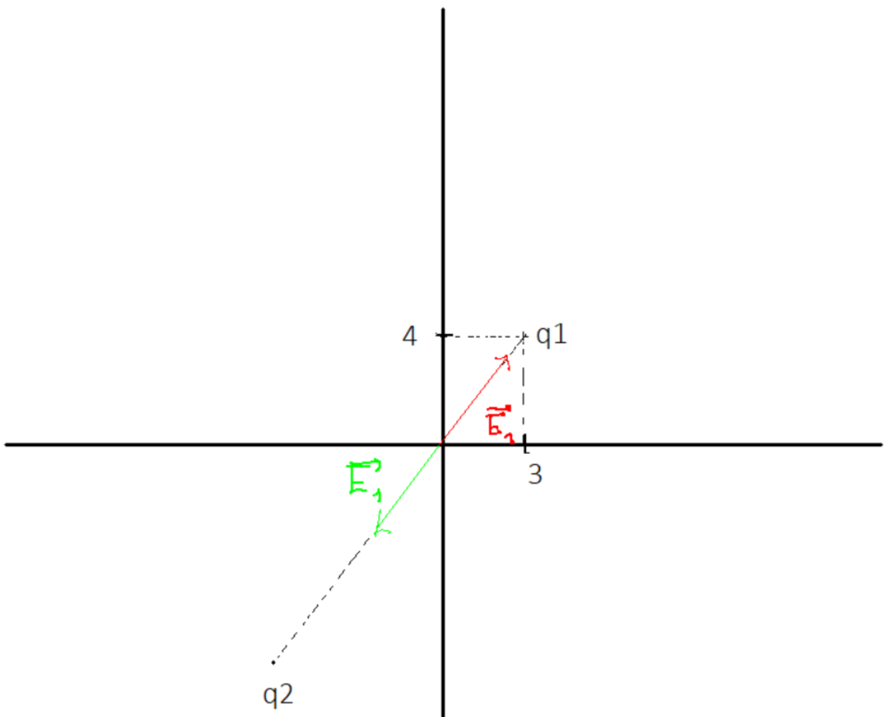
$$\beta_T = 10 \cdot \log\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}}\right) \approx 87\ dB$$

Pregunta B.3.- Una carga puntual positiva está situada en el punto (3, 4) m del plano *xy*. En otro punto del plano se coloca una segunda carga puntual, también positiva y de magnitud el cuádruple de la primera, haciendo que el campo se anule en el origen de coordenadas.

a) Determine la posición de la segunda carga.
b) Si el potencial en el origen de coordenadas vale $1{,}08 \cdot 10^4\ V$, encuentre el valor de las cargas.

Dato: Constante de Coulomb $K = 9 \cdot 10^9\ N\ m^{-2} C^2$

a) Lo primero de todo, dibujemos la situación:



Vemos que, si el campo total es nulo, el campo creado por la carga q_2 debe ser igual y opuesto al creado por la carga q_1. Por ello, en módulo ambos campos deben ser iguales. Llamando r_1 a la distancia de la carga 1 al centro y r_2 a la distancia de la carga 2 al centro, entonces:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2}$$

Como $q_2 = +4q_1$ entonces:

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{4q_1}{r_2^2} \rightarrow r_2^2 = 4r_1^2 \rightarrow r_2 = 2r_1$$

Por el Teorema de Pitágoras $r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ m$, por lo que:

$$r_2 = 10\ m$$

Como además vemos en la figura que la carga q_2 debe estar en el tercer cuadrante, entonces su vector posición será:

$$\vec{r}_2 = -2 \cdot \vec{r_1} \rightarrow \vec{r_2} = -2 \cdot (3,4) = (-6, -8)\ m$$

b) El potencial total creado por las dos cargas es:

$$V_T = V_1 + V_2 = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{4kq_1}{2r_1} = \frac{3kq_1}{r_1}$$

Por lo que la carga 1 valdrá:

$$q_1 = \frac{V_T \cdot r_1}{3k} = \frac{1{,}08 \cdot 10^4 \cdot 5}{3 \cdot 9 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-6}\ C$$

Así que la carga 2 valdrá:

$$q_2 = 8 \cdot 10^{-6}\ C$$

Pregunta B.4.- Una lámina de vidrio se halla sobre un líquido de índice de refracción desconocido. La longitud de onda de la luz en el vidrio se reduce a un 70 % de su valor en el aire. Si se emite luz desde el líquido, los rayos con ángulos de incidencia superiores a 30° en la cara inferior de la lámina no se refractan al aire por su cara superior. Calcule:

a) El índice de refracción del vidrio.
b) El índice de refracción del líquido.

Dato: Índice de refracción del aire $n_{aire} = 1$

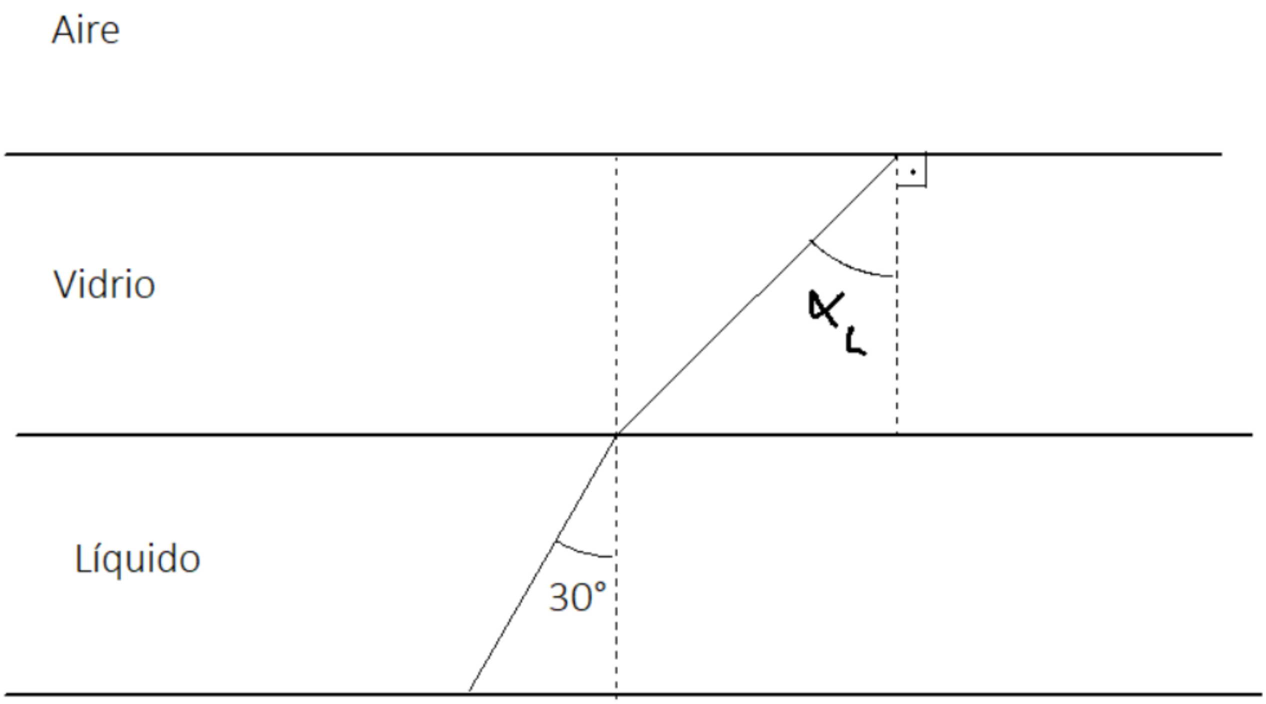
a) El índice de refacción del vidrio es:

$$n_{vid} = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \cdot \nu}{\lambda \cdot \nu}$$

Donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío y λ la longitud de onda en el vidrio. Como $\lambda = 0{,}7\ \lambda_0$ la expresión anterior se reduce a:

$$n_{vid} = \frac{\lambda_0}{0{,}7\lambda_0} = \frac{1}{0{,}7} = 1{,}43$$

b) Si para ángulos superiores a 30° no encontramos refracción en la separación entre el vidrio y el aire, significa que estamos en la situación siguiente:



Es decir, que tras refractarse al pasar del líquido al vidrio sale justo con el ángulo límite entre el vidrio y el aire. Este ángulo límite lo podemos calcular considerando que el ángulo refractado del aire en la Ley de Snell es $90°$:

$$n_{vid} \cdot sen(\alpha_L) = n_{aire} \rightarrow sen(\alpha_L) = \frac{n_{aire}}{n_{vid}} \rightarrow \alpha_L = arcsen\left(\frac{n_{aire}}{n_{vid}}\right)$$

$$\alpha_L = 44{,}37°$$

De esta manera, como conocemos el ángulo refractado en la separación entre el líquido y el vidrio, entonces:

$$n_{liq} \cdot sen(\alpha) = n_{vid} \cdot sen(\beta) \rightarrow n_{liq} = \frac{n_{vid} \cdot sen(\beta)}{sen(\alpha)}$$

Así pues, tomando $n_{vid} = 1{,}43,\ \alpha = 30°$ y $\beta = \alpha_L = 44{,}37°$:

$$n_{liq} = 2$$

Pregunta B.5.- Un electrón relativista ha llegado a adquirir una energía cinética equivalente a la energía de un fotón de longitud de onda $5 \cdot 10^{-12}\ m$ en el vacío. Calcule:
a) La energía cinética del electrón, en eV.

b) La velocidad del electrón.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$*; Constante de Planck,* $h = 6{,}63 \cdot 10^{34}\ J \cdot s$ *; Velocidad de en el vacío,* $c = 3 \cdot 10^{8}\ m\ s^{-1}$*; Masa del electrón en reposo,* $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$.

a) La energía del fotón será:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \to E_\gamma = 3{,}978 \cdot 10^{-14}\ J = 248\ 652\ eV$$

Por ello, la energía cinética del electrón es $E_c = 248\ 652\ eV$

b) Como la energía en reposo es $E_0 = m_e c^2$ y la energía total es $E_T = \gamma m_e c^2$ entonces la energía cinética será:

$$E_T = E_0 + E_c \to E_c = E_T - E_0 \to E_c = (\gamma - 1) m_e c^2$$

Por ello, para hallar la velocidad primero despejamos γ de la ecuación anterior, y, finalmente, de la definición del factor γ extraeremos la velocidad a la que viaja:

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_e c^2} \to \gamma = 1 + \frac{3{,}978 \cdot 10^{-14} J}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot (3 \cdot 10^{8}\ ms^{-1})^2} = 1{,}485$$

Por otro lado como $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ entonces:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \to 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \to 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cdot c$$

Entonces, como $\gamma = 1{,}485$ la velocidad a la que viaja es:

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}485^2}} \cdot c = 0{,}739c = 2{,}218 \cdot 10^8\ ms^{-1}$$