INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen. Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos

1. **(2 puntos) Se consideran las matrices M, N y P dadas por:**

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix};\ N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   a) **Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:**

$$M \cdot N = 2N \text{ y} (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$$

   b) **Para $a = 0$, $b = -1$, $c = -2$. Compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.**

2. **(2 puntos)**

   a) **Encuentre el valor del parámetro real a tal que**

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)dx = \frac{2}{3}$$

   b) **Sea**

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} x^2 - b, & si\ x < 0 \\ 3x + 2, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

   Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

3. **(2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:**

$$f'^{(x)} = \frac{-1}{x^2} + a$$

   a) **Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1; 3)$ y $\left(2; \frac{7}{2}\right)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.**
   b) **Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.**

4. **(2 puntos) Se considera la siguiente función de variable real:**

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

   a) **Determine las asíntotas de esta función.**
   b) **Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.**

5. **(2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10, y el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?**

6. (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.
7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array}\right\}$$

   a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
   b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

8. (2 puntos) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:
   a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
   b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

9. (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.
   a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año, obteniéndose que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.
   b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas, la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

10. Según los datos del INE, el 45, 68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23, 98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:
   a) Viaje por vacaciones.
   b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

SOLUCIÓN

1. (2 puntos) Se consideran las matrices M, N y P dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix};\ N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ejercicio, se debe llegar a obtener un sistema de ecuaciones cuyas variables sean los parámetros contenidos en la matriz M. Para ello, primeramente, se desarrollan las ecuaciones matriciales dadas:

- Primera ecuación matricial:

$$M \cdot N = 2N \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a+2b \\ -c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Segunda ecuación matricial:

$$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N \to \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)^t + \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} -2a+2c-3b \\ -b-c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A continuación, se crea un sistema de ecuaciones a partir de las matrices resultantes; y, seguidamente, se hace el despeje de los parámetros:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} -a+2b \\ -c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2a+2c-3b \\ -b-c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \to \begin{cases} -a+2b=-2 \\ -c+2=4 \to \boldsymbol{c=-2} \\ -2a+2c-3b=-1 \\ -b-c-1=2 \end{cases} \to \begin{cases} -a+2b=-2 \\ -2a+2(-2)-3b=-1 \\ -b-(-2)-1=2 \to \boldsymbol{b=-1} \end{cases} \to$$
$$\to \begin{cases} -a+2(-1)=-2 \\ -2a-4-3(-1)=-1 \end{cases} \to \boldsymbol{a=0}$$

CONCLUSIÓN

El valor de los parámetros será $a=0$, $b=-1$ y $c=-2$

b) Para $a=0, b=-1, c=-2$. Compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

RESOLUCIÓN

Para resolver este apartado, una vez reemplazados los valores indicados en los parámetros, se debe verificar que se cumpla $M^2 = M + 2I$:

$$M^2 = M + 2I \to \begin{cases} M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ M + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Una vez comprobado que sí se cumple esta relación, se pueden resolver M^{-1} y M^3:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \left(Adj(M)\right)^t =; \begin{array}{c} |M| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ Adj(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \left(Adj(M)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

CONCLUSIÓN

El valor de M^{-1} es $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; y, el de M^3 es $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

2. (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)dx = \frac{2}{3}$$

RESOLUCIÓN

Para obtener el valor de a, primeramente se debe resolver la integral dada; y, seguidamente, aplicando la Regla de Barrow, despejar el parámetro.:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)dx = \int_0^1 (x^{1/2} - a)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - ax\Bigg]_0^1 = \frac{1^{3/2}}{3/2} - a \cdot 1 = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \to a = 0$$

NOTA: dado que la función dada está incompleta, se asumirá que el área comprendida en el intervalo [0,1] es siempre positiva.

CONCLUSIÓN

Para que se cumpla que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a)dx = {}^2/_3$, el parámetro a valdrá 0.

b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b, & si\ x < 0 \\ 3x + 2, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

RESOLUCIÓN

Para resolver el ejercicio, debe obligarse a que se cumpla la definición de continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \to \begin{cases} f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^2 - b = -b \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \end{cases} \to -b = 2 \to b = -2$$

Ya con la función completada, puede estudiarse la derivabilidad de la función. Para ello, se calcula en primer lugar, la derivada de la función; y, a continuación, se restudia si la derivada es continua en $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & si\ x<0\\ 3x+2, & si\ x\geq 0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & si\ x<0\\ 3, & si\ x\geq 0\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)\rightarrow\begin{cases}f'(0)=3=3\\ \lim_{x\to 0^-}f'(x)=2\cdot 0=0\\ \lim_{x\to 0^+}f'(x)=3=3\end{cases}\rightarrow f'(0)\neq\lim_{x\to 0^-}f'(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f'(x)$$

CONCLUSIÓN

Para que la función se continua en $x=0$, el parámetro b debe valer -2. En dicho valor de x, la función no es derivable.

3. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{-1}{x^2}+a}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1;3)$ y $\left(2;\frac{7}{2}\right)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

RESOLUCIÓN

Para calcular el valor del parámetro a, primeramente se debe calcular la integral de la función. Sobre esto, se resuelve $f(1)=3$ y $f(2)=\frac{7}{2}$. Se obtendrá con ello un sistema de ecuaciones dependiente de los parámetros a y c. Al resolverlo, se podrá averiguar el valor de a; y, en consecuencia, escribir la expresión de $f(x)$.

$$f(x)=\int\left(\frac{-1}{x^2}+a\right)dx=\frac{1}{x}+ax+c\rightarrow\begin{cases}f(1)=3\rightarrow\frac{1}{1}+a\cdot(1)+c=3\rightarrow \boldsymbol{a+c=2}\\ f(2)=\frac{7}{2}\rightarrow\frac{1}{2}+a\cdot(2)+c=\frac{7}{2}\rightarrow\frac{1}{2}+2a+c=\frac{7}{2}\rightarrow\boldsymbol{2a+c=3}\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}a+c=2\rightarrow c=2-a\\ 2a+c=3\end{cases}\rightarrow 2a+(2-a)=3\rightarrow 2a+2-a=3\rightarrow a=1;c=2-1\rightarrow c=1$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+x+1$$

CONCLUSIÓN

La expresión de $f(x)$ es $f(x)=\frac{1}{x}+x+1$.

b) Para $a=1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

RESOLUCIÓN

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como sus posibles extremos relativos, se necesitan conocer previamente su dominio y sus puntos críticos.

Dado que la función $f(x)$ es una expresión racional, es necesario averiguar cuándo el denominador de la función es nulo. En este caso, sería cuando $x = 0$, por lo que el dominio de la función será:

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

En cuanto a los puntos críticos, estos se obtienen tomando la derivada de la función, igualándola a cero, y despejando x:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 = 0 \to \frac{-1}{x^2} = -1 \to x^2 = 1 \to x = \pm\sqrt{1} \to x = \pm 1$$

Obtenida esta información, se procede a crear intervalos considerando el dominio de la función, y realizando intervalos en el mismo. Estos intervalos se crean realizando cortes en el dominio, usando los valores de x antes obtenidos. A continuación, se tomará un valor dentro de los intervalos, y se reemplazará en la primera derivada. Si el signo de la misma en dichos valores es positivo, la función será creciente; y, en caso contrario, decreciente. Si, en un punto crítico, se observa que hay una alternancia de creciente a decreciente, se puede afirmar que se tratará de un máximo; y, en caso de que la alternancia pase de decreciente a creciente, podrá asegurarse de que será un mínimo.

Dominio	$(-\infty, -1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1, +\infty)$
Valor de x	-2	-0’5	0’5	2
Signo de $f'(x)$	> 0	< 0	< 0	> 0
Monotonía	Crece	Decrece	Decrece	Crece
Extremos relativos	Máximo		Mínimo	

CONCLUSIÓN

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, y decreciente en los intervalos $(-1,0) \cup (0,1)$. Presenta un máximo en el punto $x = 1$, y un mínimo en el punto $x = 1$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función de variable real:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

RESOLUCIÓN

A la hora de estudiar las asíntotas, se deben valorar las asíntotas verticales, horizontales; y, en caso de que no existan estas últimas, oblicuas.

En cuanto a las asíntotas verticales, se debe conocer primeramente el dominio de la función. A continuación, se estudia la tendencia de la función cuando la misma se aproxima a la izquierda y a la derecha de aquellos números que anulen al dominio. Si el resultado obtenido es $-\infty$ o $+\infty$, entonces existirá asíntota vertical en dicho; y, en caso contrario, no:

$$x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2 \to Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$x = -2$		$x = 2$	
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
Asíntota Vertical en $x = -2$		Asíntota Vertical en $x = 2$	

Con respecto a las asíntotas horizontales, se debe estudiar cuál es la tendencia de la función cuando x valores negativos y positivos que sean muy grandes. Si el resultado tiende a un número, entonces existirá asíntota horizontal; y, en caso contrario, no; y, por tanto, sería necesario comprobar si hubiera asíntotas oblicuas.

$x \to -\infty$	$x \to +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
Asíntota Horizontal en $y = 1$	

CONCLUSIÓN

La función tiene una asíntota vertical en $x = -2$ y en $x = 2$, y una asíntota horizontal en $y = 1$. No tiene asíntotas oblicuas.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

RESOLUCIÓN

Para obtener la ecuación de la recta tangente, se buscan los valores x_0, y_0 y m; para luego reemplazarlos en la ecuación general de la recta tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$:

1. Para $x = 0$, se cumple que $x_0 = 1$. Por tanto, los valores de y_0 y m serán:
2. Valor de y_0: $y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{1^2+4}{1^2-4} = -\frac{5}{3} \to y_0 = -\frac{5}{3}$
3. Valor de m: $\left.\begin{matrix} m = f'(x_0) \\ f'(x) = \frac{-16x^2}{(x^2-4)^2} \\ x_0 = 1 \end{matrix}\right\} m = f'(1) = \frac{-16\cdot(1)^2}{((1)^2-4)^2} = \frac{-16}{9} \to m = -\frac{16}{9}$
4. Reemplazando en la ecuación general: $y + \frac{5}{3} = -\frac{16}{9}(x - 1) \to y = -\frac{16x}{9} + \frac{1}{9}$

CONCLUSIÓN

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ será: $y = -\frac{16x}{9} + \frac{1}{9}$

5. (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10, y el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

RESOLUCIÓN

Antes de empezar a resolver el ejercicio, es necesario definir cuáles son las variables del problema. En este caso, x se corresponderá con el primer número; e y, con el segundo número.

En base a eso, se plantearán la función objetivo y las restricciones asociadas al problema:

- Función objetivo: "*se desea que la suma sea lo menor posible*": $Min\ S(x,y) = 5x + y$
- Restricciones:
  - Todos los números reales no negativos menores o iguales que 10: $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 10 \end{cases}$
  - El doble del primero menos el segundo no pase de 10: $2x - y \le 10$
  - El triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12: $3x + 2y \ge 12$
  - Se desea que la suma sea lo menor posible: $S(x,y) = x + y$

Ya con el problema planteado, lo siguiente es representar las inecuaciones que conforman la región factible:

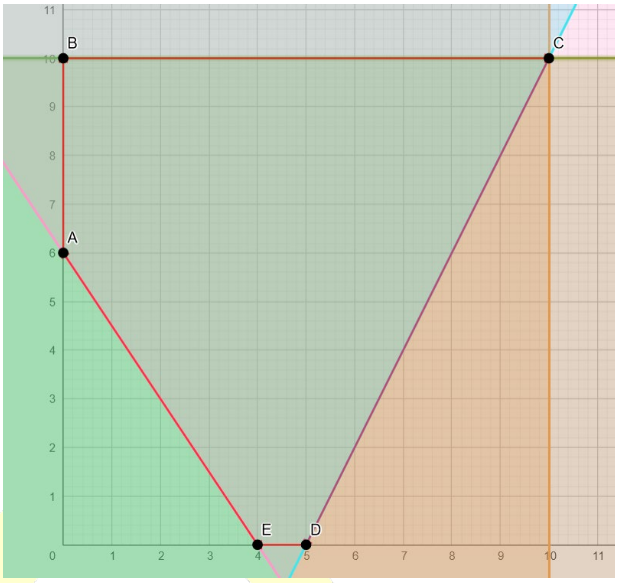
$$Min\ S(x, y) = x + y$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 2x - y \leq 10\ [1] \\ 3x + 2y \geq 12\ [2] \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

[1]	
x	y
0	-10
5	0

[2]	
x	y
0	4
6	0



Una vez representada la región factible, y obtenidas las coordenadas que la delimitan, se reemplaza cada coordenada en la función objetivo:

- $A = (0,6) \rightarrow S_A(0,6) = 0 + 6 = 6$
- $B = (0,10) \rightarrow S_B(0,10) = 0 + 10 = 10$
- $C = (10,10) \rightarrow S_C(10,10) = 10 + 10 = 20$
- $D = (6,0) \rightarrow S_D(6,0) = 6 + 0 = 6$
- $E = (4,0) \rightarrow S_E(4,0) = 4 + 0 = 4$

CONCLUSIÓN

La combinación más pequeña posible es que el primer número sea 4, y el segundo sea 0, dando una suma de 4.

6. (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

RESOLUCIÓN

Antes de empezar a resolver el ejercicio, es necesario definir cuáles son las variables del problema. En este caso, x se corresponderá con el número de pianos; y, con el número de guitarras; y z, con el número de violines.

En base a eso, se plantearán las ecuaciones del problema:

- Se tienen 70 instrumentos distribuidos entre los tres tipos: $x + y + z = 70$
- La cantidad de pianos más la de violines es igual a la cantidad de guitarras: $x + z = y$
- El mismo número de violines más el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, hay 180: $2x + 4y + z = 180$

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ x+z=y \\ 2x+4y+z=180 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \\ 2x+4y+z=180 \end{cases}$$

A continuación, se resolverá el ejercicio. En este caso, se utilizará el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \\ 2x+4y+z=180 \end{cases} \rightarrow A^* = \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 180 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{f_2' = f_2 - f_1 \\ f_3' = f_3 - f_1}}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2' \\ f_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & 0 & -70 \\ 1 & 3 & 0 & 110 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \rightarrow z = 70-35-5 \rightarrow z=30 \\ -2y=-70 \rightarrow y = \dfrac{-70}{-2} \rightarrow y=35 \\ x+3y=110 \rightarrow x = 110 - 3\cdot(35) \rightarrow x=5 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN

En total hay 5 pianos, 35 guitarras, y 30 violines.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

RESOLUCIÓN

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario transcribir las ecuaciones a matriz:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{cases} \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{array}\right)$$

<u>Discusión del sistema</u>

Para discutir el sistema, se hará el siguiente procedimiento:

i) Se calcula el determinante de la matriz A, se iguala a cero, y se despeja el parámetro a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{vmatrix} = 7a - 21 = 0 \rightarrow 7a = 21 \rightarrow a = 3$$

ii) Se discuten los posibles tipos de sistema, mediante casos:

<u>Caso 1</u>: $a \neq 3$

- $|A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$
- $|A^*| \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 3$

Interpretación

$Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ inc$

SCD

<u>Caso 2</u>: $a = 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Interpretación

- $|A| = 0 \to Rg(A) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to Rg(A) = 2$
- $|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \to Rg(A^*) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to Rg(A^*) = 2$

$$Rg(A) = Rg(A^*) < Nº\ inc$$
$$SCI$$

CONCLUSIÓN

Si el parámetro a vale 3, el sistema tiene infinitas soluciones; y, en caso contrario, una única solución.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

RESOLUCIÓN

Como se comprobó en el apartado anterior que, para cuando $a = 3$, el sistema tiene infinitas soluciones, es necesario descartar una ecuación de las tres dadas (debido a que el rango de la matriz A es 2), y descartar una solución de las tres dadas (debido a que el rango de A^* es 2). Se optará por descartar la tercera ecuación, y asignar a la variable z como el parámetro solución λ:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \to 2x + y = 2 - 3\lambda \\ 3x + y + z = 0 \to 3x + y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Se obtienen con esto dos ecuaciones dependientes ambas de x e y. Seguidamente pues, se resuelven las otras dos variables. En este caso, se optará por el método de reducción, restándole a la primera ecuación, la segunda:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 - 3\lambda \\ 3x + y = -\lambda \to y = -\lambda - 3x \end{cases} \to \{2x + (-\lambda - 3x) = 2 - 3\lambda \to 2x - \lambda - 3x = 2 - 3\lambda \to$$

$$\to -x = 2 - 2\lambda \to x = -2 + 2\lambda \to$$

$$\to y = -\lambda - 3(-2 + 2\lambda) \to y = -\lambda + 6 - 6\lambda \to y = 6 - 7\lambda$$

CONCLUSIÓN

La solución para el sistema de ecuaciones será $x = -2 + 2\lambda; y = 6 - 7\lambda; z = \lambda$.

8. (2 puntos) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario definir los sucesos planteados en el ejercicio:

- Suceso $N = día\ nublado$: $P(N) = 0{,}5$
- Suceso $T = temperatura\ menor\ de\ 10\ grados$: $P(T) = 0{,}07$
- Suceso $N \cup T = día\ nublado\ o\ con\ temperatura\ menor\ a\ 10\ grados$: $P(N \cup T) = 0{,}35$

Con esta información, puede ya resolverse el ejercicio

a) **Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.**

RESOLUCIÓN

El suceso "$esté\ nublado\ y\ la\ temperatura\ baje\ de\ los\ 10\ grados$" se refiere a que se produzcan los dos sucesos a la vez:

$$P(N \cap T) = P(N) + P(T) - P(N \cup T) \rightarrow P(N \cap T) = 0{,}5 + 0{,}05 - 0{,}35 = 0'22$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados es de un 22%.

b) **No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.**

RESOLUCIÓN

El suceso "$no\ esté\ nublado, sabiendo\ que\ la\ temepratura\ no\ baja\ de\ los\ 10\ grados$" se refiere a un suceso condicionado. Sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados, hay que averiguar cómo de probable es que no esté nublado:

$$P(\overline{N}|\overline{T}) = \frac{P(\overline{N} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{1 - P(N \cup T)}{1 - P(T)} \rightarrow P(\overline{N}|\overline{T}) = \frac{1 - 0{,}35}{1 - 0{,}07} = 0{,}6989$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que no esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados, es de un 69,89%.

9. **(2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.**

Antes de comenzar a resolver el apartado, es necesario identificar el tipo de distribución que se tiene. Dado que e indica que es una distribución normal, la variable se distribuiría de la siguiente manera:

$$N(\mu; 8)$$

a) **Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año, obteniéndose que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.**

RESOLUCIÓN

Para calcular el intervalo de confianza para el porcentaje medio de aprobados, se hará el siguiente procedimiento:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow IC(\bar{x})_{0{,}99} = \left(65 \pm 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right) = (65 \pm 4'61) = (60{,}39; 69{,}61)$$

NOTA: Cálculo de $z_{\alpha/2}$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{1-0{,}99}{2} = 0'995 \rightarrow P\left(z_{\alpha/2} = m\right) = 0'995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

CONCLUSIÓN

El porcentaje medio de aprobados estará comprendido entre 60'39 y 69'61, con una confianza del 99%.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas, la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Antes de comenzar a resolver el apartado, hay que tener en cuenta que ahora se ha dado un valor para la media poblacional, por lo que la distribución dada pasaría a ser la siguiente:

$$N(67; 8)$$

Con esto en mente, ya sí puede pasarse a resolver el apartado:

RESOLUCIÓN

Se pide que se calcule la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales, lo que implica que es necesario aplicar la tipificación de la media de la variable.

$$P(65 \leq \bar{X} \leq 69) = P(\bar{X} \leq 69) - P(\bar{X} \leq 65) = P\left(Z \leq \frac{69-67}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) - P\left(Z \leq \frac{65-67}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}79) - P(Z \leq -0{,}79) = P(Z \leq 0{,}79) - [1 - P(Z \leq 0{,}79)] = 0{,}7852 - (1 - 0{,}7852) = 0{,}5704$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que la puntuación media esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales es de un 57’04%.

10. Según los datos del INE, el 45,68% de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98% de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10% viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40% y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85%.

En el ejercicio se habla de tres rangos de renta (menos de 1500€/mes, entre 1500 y 3000€/mes, y más de 3000€/mes). De eso es infiere que hay tres sucesos; y, por tanto, que la suma de los tres, debe dar 1. Si se considera que $P(B) = 0{,}4568$ y que $P(C) = 0{,}2398$, entonces puede deducirse:

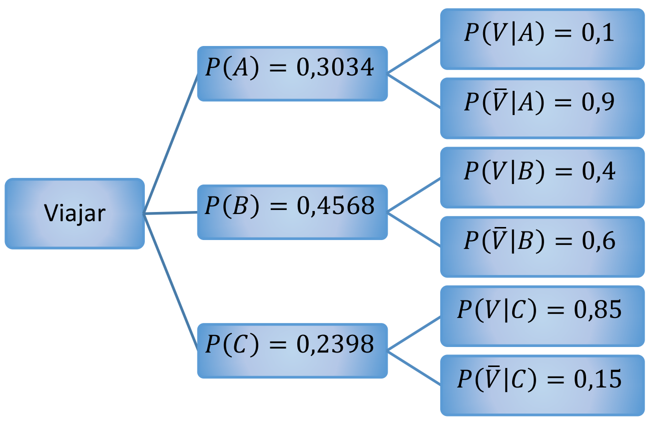
$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - [P(B) + P(C)] \rightarrow P(A) = 1 - [\,0{,}4568 + 0{,}2398] = 0{,}3034$$

Por tanto, la probabilidad del suceso A será $P(A) = 0{,}3034$.

Contando con esta información, pueden plantearse los sucesos siguientes:

- $A =$ Renta menor a 1500€*: $P(A) = 0{,}3034$
- $B =$ Renta entre 1500€y 3000€ B: $P(B) = 0{,}4568$
- $C =$ Renta mayor de 3000€ C: $P(C) = 0{,}2398$

- $V|A =$ Probabilidad de que viaje por vacaciones si tiene menos de 1500€: $P(D|A) = 0{,}1$
- $V|B =$ Probabilidad de que viaje por vacaciones si tiene entre1500€ y 3000€: $P(D|B) = 0{,}4$
- $V|C =$ Probabilidad de que viaje por vacaciones si tiene más de 3000€: $P(D|C) = 0{,}85$



Ahora sí, puede pasarse a resolver el ejercicio

Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

a) Viaje por vacaciones.

RESOLUCIÓN

Para calcular la probabilidad de que vaya de vacaciones, se aplicará el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(\bar{V}) = P(A \cap \bar{V}) + P(B \cap \bar{V}) + P(C \cap \bar{V}) = P(A) \cdot P(\bar{V}|A) + P(B) \cdot P(\bar{V}|B) + P(C) \cdot P(\bar{V}|C) \to$$

$$\to P(D) = 0{,}3034 \cdot 0{,}1 + 0{,}4568 \cdot 0{,}4 + 0{,}2398 \cdot 0{,}85 = 0{,}4169$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que, elegida al azar una familia española viaje por vacaciones, es de un 41’69%.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

RESOLUCIÓN

Antes de comenzar, es necesario interpretar a qué se refiere que su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros. Se está hablando del suceso complementario al suceso A, por lo que eso afectará de cara a la resolución del apartado; o, lo que es lo mismo, que, o tenga entre 1500 y 3000 euros (suceso B); o que tenga más de 3000 euros (suceso C).

Considerando lo anterior, para calcular la probabilidad de, sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso sea mayor de 1500€ se resolverá mediante el Teorema de Bayes:

$$P(\bar{A}|V) = P(B \cup C|V) = \frac{P(B \cap V) + P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{P(B) \cdot P(V|B) + P(C) \cdot P(V|C)}{P(V)} \to$$

$$\to P(\bar{A}|V) = \frac{0{,}4568 \cdot 0{,}4 + 0{,}2398 \cdot 0{,}85}{0{,}4169} = 0{,}9272$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que, sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros, es de un 92,72%.