Pregunta A.1.- El satélite UPM-Sat2 se lanzó el día 3 de septiembre de 2020 a una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de 5710s. Sabiendo que el satélite tiene una masa de 50kg, calcule:

a) **La altura a la que orbita y la energía que hubo que transmitirle para ponerlo en órbita desde la superficie de la tierra.**

b) **La velocidad y la aceleración centrípeta de su órbita.**

Datos: Constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$**, Masa de la Tierra,** $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}kg$**, Radio de la tierra,** $R_T = 6,37 \cdot 10^6 m$

La segunda ley de Newton nos dice que $F = ma$. En nuestro caso, la fuerza será la fuerza gravitatoria y, por ser un movimiento circular, la aceleración será aceleración centrípeta. Sustituyendo esa información, tenemos

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \tag{1}$$

que, cancelando y simplificando, es

$$\frac{GM}{r} = v^2. \tag{2}$$

Podemos relacionar esta fórmula con los dastos del enunciado. El periodo está relacionado con la velocidad mediante $v = \frac{2\pi r}{T}$, y el radio se relaciona con la altura mediante $r = R_T + h$. Sustituyendo, tenemos

$$\frac{GM}{r} = (\frac{2\pi r}{T})^2 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}, \tag{3}$$

y la altura tendrá que ser

$$h = r - R_T = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2} - R_T = 5,32 \cdot 10^5 m \tag{4}$$

En cuanto a la energía: una vez está en órbita tiene una energía

$$E_f = E_p + E_c = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = -1,44 \cdot 10^9 J \tag{5}$$

Por otro lado, antes de despegar, estando en la superficie de la tierra, tenía una energía

$$E_i = E_p + E_c = E_p = -\frac{GMm}{R_T} = -3,13 \cdot 10^9 J. \tag{6}$$

La energía que hubo que transmitirle es la diferencia entre ambas energías,

$$\Delta E = E_f - E_i = 1,68 \cdot 10^9 J \tag{7}$$

2. Una vez conocidos el radio y la altura, podemos hallar la velocidad y la aceleración centrípeta:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7,59 \cdot 10^3 \tag{8}$$

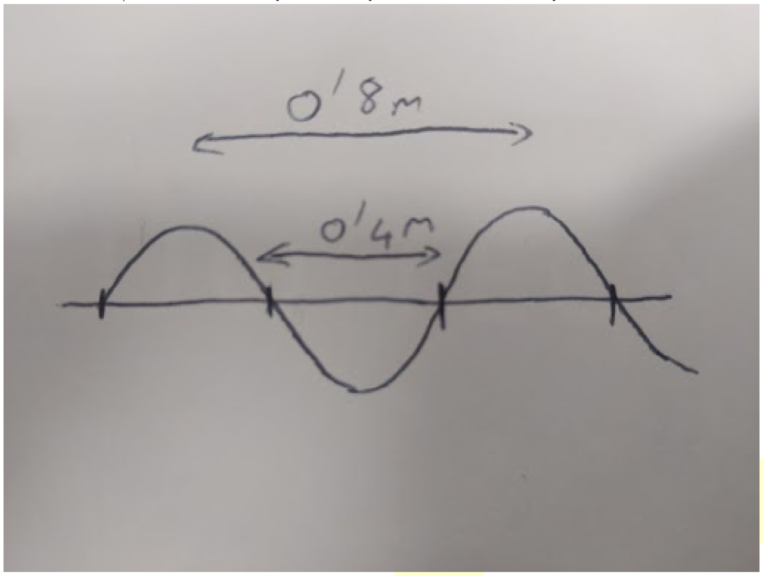
$$a = \frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2} = 8,53 m/s^2 \tag{9}$$

Pregunta A.2.- Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje x viaja una onda armónica transversal con velocidad de propagación $v = -400\vec{i}ms^{-1}$**. La onda produce en la cuerda una aceleración máxima de** $2 \cdot 10^4 ms^{-2}$**. En un instante cualquiera, los puntos de elongación nula se repiten cada 0,4m a lo largo del eje x.**

a) **Determine la frecuencia y amplitud de la onda**

b) **Si en el instante inicial y en el origen de coordenadas la elongación es 1mm y la velocidad es positiva, calcule la elongación en** $x = 1,2m$ **para** $t = 2s$.

En primer lugar, observamos que, si los puntos de elongación nula se repiten cada 0,4m, la longitud de onda tiene que ser $\lambda = 0,8m$. Esto se puede apreciar en el esquema



Sabemos también que la longitud de onda y la velocidad de propagación se relacionan con la frecuencia mediante

$$v = \lambda f \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = 500Hz. \tag{10}$$

La frecuencia, a su vez, se relaciona con la aceleración máxima mediante

$$a_{max} = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A = 4\pi^2 f^2 A \rightarrow A = \frac{a_{max}}{4\pi^2 f^2} = 2mm \tag{11}$$

La elongación en un punto dado viene dada por la fórmula

$$y(x,t) = Asin(\omega t \pm kx + \phi_0). \tag{12}$$

En nuestro caso,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{5\pi}{2} \tag{13}$$

$$\omega = 2\pi f = 1000\pi \tag{14}$$

$$A = 2mm. \tag{15}$$

y, como la onda va hacia la izquierda (porque la velocidad de propagación es negativa), el signo tiene que ser positivo. Por tanto,

$$y(x,t) = 2\sin(1000\pi t + 2,5\pi x + \phi_0). \tag{16}$$

Además, la velocidad será

$$v = \frac{dy}{dt} = 2000\pi cos(1000\pi t + 2,5\pi x + \phi_0). \tag{17}$$

Para averiguar la fase inicial, que es lo que nos falta, usamos las condiciones iniciales que nos dan:

$$y(0,0) = 1mm \rightarrow 2sin(\phi) = 1 \rightarrow \sin(\phi_0) = 0,5 \qquad v(0,0) > 0 \rightarrow 2000\pi cos(\phi_0) > 0 \rightarrow cos(\phi_0) > 0. \tag{18}$$

De la primera ecuación concluimos que o bien $\phi_0 = \pi/6$ o $\phi_0 = 5\pi/6$. Pero $5\pi/6$ no cumple la segunda condición, así que $\phi_0 = \pi/6$.

Sabiendo eso ya podemos calcular la elongación en x=1,2 m en t=2s. Sería

$$y(1'2,2) = 2sin(1000 \cdot 2 + 2,5 \cdot 1,2\pi + \pi/6) = -1mm. \tag{19}$$

Pregunta A.3.- Una carga situada en un punto del plano xy da lugar a un potencial de 54V y a un campo eléctrico $E = -180jVm^{-1}$ en el origen de coordenadas.

a) **Determine el valor de la carga y su posición.**

b) **Se trae una segunda carga desde el infinito hasta el origen de coordenadas, proceso en el que la fuerza ejercida por la primera carga realiza un trabajo de -270nJ. Determine el valor de la segunda carga.**

Datos: Constante de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$.
En primer lugar, el que el potencial sea positivo significa que la carga es positiva, y por lo tanto emite un campo eléctrico que se aleja de ella. Como el campo eléctrico va en la dirección $-\vec{j}$, la carga tendrá que estar en la mitad superior del eje y, como se muestra en el esquema.

A continuación, sabemos que

$$V = K\frac{q}{r} = 54V, \tag{20}$$

$$|E| = K\frac{q}{r^2} = 180\frac{V}{m}. \tag{21}$$

Como K es un dato, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si dividimos la de arriba entre la de abajo tenemos

$$r = \frac{54}{180} = 0,3m \tag{22}$$

y, sustituyendo,

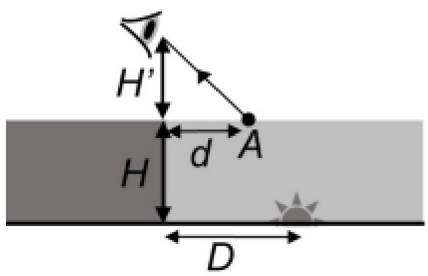
$$q = \frac{54 \cdot 0,3}{K} = 1,8 \cdot 10^{-9}C = 1,8nC. \tag{23}$$

Por tanto, la partícula tiene una carga de 1,8nC y está en la posición $0,3\vec{j}$

b. El trabajo necesario para llevar una carga desde el infinito a un punto A es $W = -qV_A$, donde V_A es el potencial en ese punto. En nuestro caso, entonces,

$$q = -\frac{W}{V} = \frac{-270 \cdot 10^{-9}}{54} = -5nC. \tag{24}$$

Pregunta A.4.- Un observador está situado al borde de un estanque de profundidad $H = 2m$. Su visual está a una altura $H' = 1,6m$ sobre la superficie del agua. En el fondo del estanque hay un foco puntual de luz. El observador lo ve cuando mira hacia el punto A de la superficie a una distancia d=1,2m del borde (vease la figura).



Calcule:

a) **El índice de refracción del agua del estanque si la longitud de onda de la luz del foco vale 375nm en ella y 500nm en el aire.**

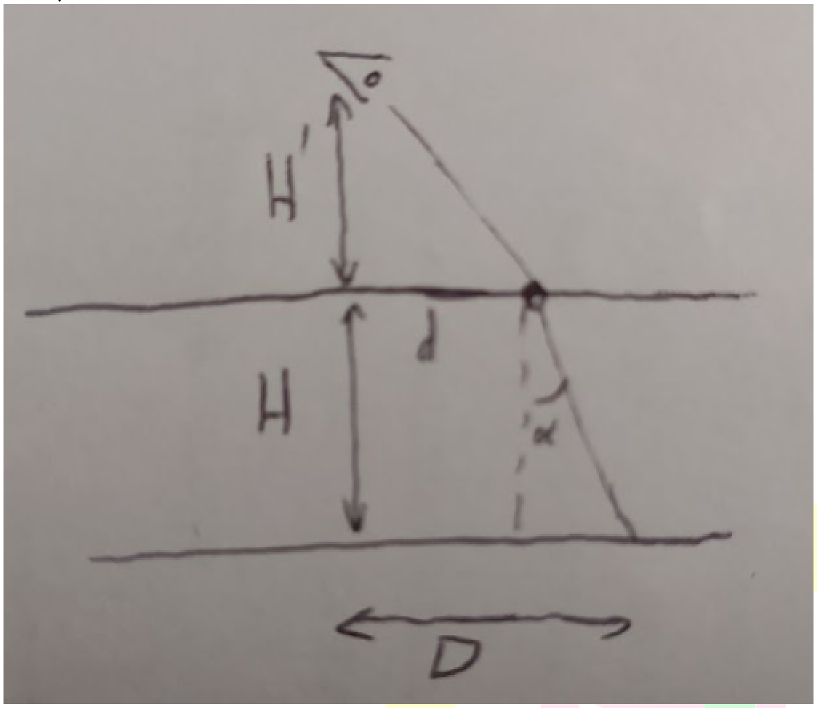
b) **La distancia D del foco a la pared del estanque.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$, Índice de refracción del aire, $n = 1$.

Sabemos que cuando la luz pasa de un medio 1 a un medio 2 se cumple $n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$. De aquí podemos sacar el índice de refracción del segundo medio, el agua:

$$n_2 = n_1\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1\frac{500}{375} = 1,33. \tag{25}$$

b)



En el dibujo se puede ver que la distancia D es la distancia d sumada a cuánto ha avanzado el rayo de luz en el agua. Si averiguamos el ángulo α, esta segunda distancia es simplemente $Htan(\alpha)$, y por tanto $D = d + Htan(\alpha)$.

Podemos averiguar el ángulo usando la ley de Snell. El ángulo de incidencia es $i = \arctan(d/H') = 36,9$, y $1sin(i) = 1,33sin(\alpha) \rightarrow \alpha = 26,8$. Por tanto,

$$D = 2,21m. \tag{26}$$

Pregunta A.5.- En un laboratorio de preparación de radiofármacos se rompe accidentalmente una ampolla de una solución que contenía ^{18}F con una actividad de $18,5MBq$.

a) **Calcule a masa de ^{18}F derramada.**

b) **Determine el tiempo que ha de transcurrir hasta que la actividad se reduzca a 37kBq.**

Datos: Vida media del ^{18}F,$\tau = 109,7minutos$, Masa molar del ^{18}F, $M_F = 18gmol^{-1}$, Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$.

La actividad de una sustancia viene dada por $A = \lambda N$. Podemos calcular λ mediante $\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{109'7min} = \frac{1}{6582s}$ De aquí, el número de átomos que tenemos es

$$N = \frac{A}{\lambda} = 18,5 \cdot 10^6 \cdot 6568 = 122 \cdot 10^9. \tag{27}$$

Pasado a moles, esto es

$$n = \frac{N}{N_A} = 20,2 \cdot 10^{-14} \tag{28}$$

Como cada mol tiene una masa de 18g, en total se han caído

$$m = nM = 20,2 \cdot 10^{-14} \cdot 18 = 364 \cdot 10^{-14}. \tag{29}$$

b. Como $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, $A(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} = A(0)e^{-\lambda t}$. Para calcular el tiempo necesario para que la actividad se reduzca a 37kBq, podemos hacer

$$37 \cdot 10^3 = 18,5 \cdot 10^6 e^{-\lambda t} \rightarrow e^{-\lambda t} = 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow -\lambda t = ln(2 \cdot 10^{-3} \tag{30}$$

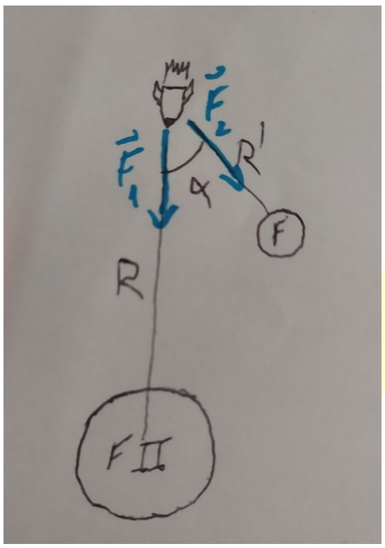
y, despejando, $t = 40,9 \cdot 10^3 s$.

Pregunta B.1.- En su aproximación al planeta Fomalhaut II, el astronauta Rocannon avista Fomalhautillo, satélite natural de Fomalhaut II, según un ángulo 53,13° con respecto de la radial hacia el planeta (eje y). La fuerza total que estos dos cuerpos ejercen sobre Rocannon y su nave, cuya masa conjunta asciende a 8000 kg, vale en ese momento $F = (9,5\vec{i} - 66,4\vec{j})N$**.**

a) **¿A qué distancia R' se encuentra Rocannon del satélite?**

b) **¿A qué distancia R se encuentra Rocannon del planeta?**

Datos: Masa del planeta, $M = 4 \cdot 10^{23} kg$; Masa del satélite, $M' = 2 \cdot 19^{20} kg$, Constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$
Tenemos una situación como la del esquema:



Vemos que la fuerza que experimenta la nave de Rocannon es la suma de dos fuerzas, $\vec{F}_1$, que es debida al planeta Fomalhault II, y $\vec{F}_2$, debida a Fomalhaultillo. La fuerza F_1 es puramente vertical, así que la componente horizontal de la fuerza que experimenta la nave es debida únicamente a F_2. Es, en particular, la componente x de F_2, que vale $|F_2| sin(\alpha)$. De aquí,

$$F_x = F_{2x} = \frac{GMm}{R'^2} sin(\alpha) \rightarrow R' = \sqrt{\frac{GMmsin(\alpha)}{F_{2x}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} 2 \cdot 10^{20} 8000 sin(53,13)}{9,5}} = 3 \cdot 10^6 m. \qquad (31)$$

Para averiguar la distancia entre Rocannon y Fomalhault estudiaremos la componente vertical de la fuerza, que será la suma de la fuerza producida por el planeta y la componente vertical de la fuerza producida por Fomalhaultillo:

$$F_y = F_1 + F_{2y} = G\frac{M_{FII} m}{R^2} + F_2 cos(\alpha) \qquad (32)$$

Recordando que $F_2 sin(53,13) = 9,5N$, tenemos que $F_2 cos(53,13) = 7,12N$. Como además $F_y = 66,4N$, tenemos

$$66,4 - 9,5 = \frac{GM_{FII} m}{R^2} \rightarrow R = 6 \cdot 10^7 m. \qquad (33)$$

Pregunta B.2.- Dos focos sonoros puntuales F1 y F2 se encuentran respectivamente situados en los puntos (−6, 0) m y (6, 0) m del plano xy. Se sabe que en el punto (2, 0) m la intensidad debida a cada foco vale lo mismo, y que en el punto (0, 2) m el nivel de intensidad sonora es de 80 dB. Determine:

a) **El cociente entre la potencia del foco F1 y la del foco F2.**

b) **La potencia del foco F1 y la intensidad que se registraría en el punto (0, 8) m si solamente se recibiesen ondas del foco F1**

La intensidad de sonido de una potencia P a una distancia r es $I = \frac{P}{4\pi r^2}$. Si, en el punto (2,0), que está a 8m del foco 1 y a 4 del foco 2, la intensidad de los dos focos es la misma, tenemos

$$\frac{P_1}{4\pi r_1^2} = \frac{P_2}{4\pi r_2^2} \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2^2 = 4. \tag{34}$$

Si en el punto (0,2) el nivel de intensidad sonora es de 80dB, la intensidad del sonido será

$$I = I_0 10^{80/10} = 10^{-4} W/m^2. \tag{35}$$

Por tanto, $I_1 + I_2 = 10^{-4}$. Por otro lado, sabemos que $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, asi que

$$\frac{P_1}{4\pi 8^2} + \frac{P_2}{4\pi 4^2} = 10^{-4}. \tag{36}$$

Como además, por el apartado anterior, $P_2 = P_1/4$,

$$\frac{P_1}{4\pi 8^2} + \frac{P_1}{4\pi 4^2 4} = 10^{-4.} \tag{37}$$

Resolviendo esta ecuación, llegamos a $P_1 = 4,02 \cdot 10^{-4} W$. A partir de esto podemos calcular la intensidad del sonido en el punto (0,8) si solo estuviese esta fuente: como el punto (0,8) está a 10 metros del foco, tendría

$$I = \frac{P_1}{4\pi 10^2} = 3,2 \cdot 10^{-5} W/m^2 \tag{38}$$

Pregunta B.3.- Dos hilos rectilíneos indefinidos, paralelos al eje y, están respectivamente situados en x = – 0,1 m y x = 0,1 m. El primero de ellos conduce una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje y. Si un electrón viaja en línea recta con velocidad $\vec{v} = 2 \cdot 10^6 \vec{j} m/s$ a lo largo de x=0,4m sin desviarse, calcule:

a) **La intensidad de corriente en el segundo hilo, especificando su sentido.**

b) **La fuerza que experimentaría un electrón que pasara por el origen de coordenadas con velocidad $\vec{v} = 2 \cdot 10^6 \vec{j} m/s$.**

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} TmA^{-1}$, Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.

Si el electrón pasa sin desviarse, la fuerza que actúa sobre él tiene que ser nula. Esto sucede cuando el campo magnético en su posición es nulo o cuando la velocidad y las líneas de campo son paralelas. Como en este caso el electrón viaja perpendicularmente a las líneas de campo, el campo magnético en $x = 0,4m$ tiene que ser cero. Esto sólo es posible si la corriente del segundo cable va hacia abajo.

El campo magnético producido por un cable con intensidad I es $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. En nuestro caso, el campo total será la suma de los dos campos magnéticos, que es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}(-\vec{k}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{k} = -\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\right)\vec{k} = 0. \tag{39}$$

Como el campo tiene que ser 0,

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \to I_2 = \frac{r_2}{r_1} I_1 = 6A. \tag{40}$$

Por tanto, la corriente del segundo cable es de 6A hacia abajo.

Un electrón pasa por el origen de coordenadas. La fuerza que sufrirá es $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, donde $\vec{B}$ es el campo magnético en el origen de coordenadas. Vamos a calcularlo. Será

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}(-\vec{k}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}(-\vec{k}) = \frac{\mu_0}{2\pi 0,1}(I_1 + I_2)(-\vec{k}) = -320 \cdot 10^{-7} \vec{k} T. \tag{41}$$

De aquí,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -1,6 \cdot 10^{-19} 2 \cdot 10^6 \vec{j} \times (-3,2) 10^{-5} \vec{k} = 1,024 \cdot 10^{-17} \vec{i} N \tag{42}$$

Pregunta B.4.- Un objeto situado 30cm a la izquierda de una lente produce una imagen con un aumento lateral de -2.

a) **Obtenga la potencia de la lente**

b) **¿A que distancia de la lente debe colocarse el objeto para que el aumento pase a ser +2?**

Recordamos la fórmula

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}, \tag{43}$$

donde s es la distancia entre la lente y el objeto, s' es la distancia entre la lente y la imagen, y f' es la distancia focal de la lente. Sabemos que $s = -30cm$, y los aumentos son $\frac{s'}{s} = -2 \rightarrow s' = -2s = 60cm$. Sustituyendo esto en la fórmula anterior, tenemos

$$\frac{1}{60} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = 20cm = 0,2m. \tag{44}$$

De aquí, la potencia es $P = \frac{1}{f'} = 5$Dioptrías.

Queremos ahora averiguar cuánto tiene que valer s para que los aumentos sean +2, es decir, $\frac{s'}{s} = 2 \rightarrow s' = 2s$. Sustituyendo esto en la fórmula, tenemos

$$\frac{1}{2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow -\frac{1}{2s} = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = -2s. \tag{45}$$

Por tanto, $s = -\frac{f'}{2} = -10cm$.

Pregunta B.5.- Una placa metálica es irradiada con luz de 400nm de longitud de onda. La máxima corriente eléctrica que llega a obtenerse con ello, debido al efecto fotoeléctrico, es de 15nA.

a) **Si el potencial de frenado que anula la corriente anterior es de 1V, obtenga el trabajo de extracción del metal.**

b) **Asumiendo que cada fotón incidente genera un fotoelectrón, calcule la energía que recibe la placa en el transcurso de 1hora.**

Datos: , Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$, Constante de Planck, h=6,63$\cdot 10^{-34}Js$.

El potencial de frenado nos da la energía cinética de los electrones excitados mediante la fórmula $eV = E_c$, así que los electrones salen con una energía de $E_c = 1,6 \cdot 10^{-19}J$. Por otro lado, la energía de los fotones es $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 4,97 \cdot 10^{-19}J$.

Sabemos que la energía de los fotones y la de los electrones están relacionadas con el potencial de frenado mediante

$$E_\gamma = W_0 + E_c \rightarrow W_0 = E_\gamma - E_c = 3,37 \cdot 10^{-19}J = 2,11eV. \tag{46}$$

La energía recibida será la energía de cada fotón, que ya la conocemos, multiplicada por el número de fotones que incide en una hora. Sabemos que la intensidad eléctrica es $I = 15nA$, y la intensidad es la carga que se mueve por segundo. Como cada electrón tiene una carga e, el número de electrones por segundo será $n = I/e = 9,4 \cdot 10^{10}$.

Nos dicen en el enunciado que el número de fotones es igual al de electrones, así que ya sabemos también cuantos fotones inciden por segundo. Como lo que queremos no es el número por segundo sino el número en una hora, multiplicamos n por el número de segundos en una hora, $N = n3600 = 3,4 \cdot 10^{14}$. Como además cada fotón tiene una energía E_γ, la energía total que recibe la placa es

$$E = NE_\gamma = 1,68 \cdot 10^{-4}J. \tag{47}$$