# OPCIÓN A

**A.1 (2 puntos) Sea $a \in R$. Considere las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) **Determine los valores del parámetro real $a$ para que $A$ tenga inversa.**
b) **Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.**

**RESOLUCIÓN:**

a) Para saber cuándo la matriz $A$ tiene o no inversa, se seguirá el siguiente procedimiento:
   i) Calcular el determinante de la matriz $A$ e igualarlo a 0, y posteriormente despejar $a$:

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a + a = 4a = 0 \to a = 0$$

   ii) Ya conocido el valor de $a$, se discute mediante casos:
   Caso 1: $a = 0 \to |A| = 0 \to \nexists A^{-1}$
   Caso 2: $a \neq 0 \to |A| \neq 0 \to \exists A^{-1}$

b) Resolución de la ecuación matricial:

$$(A - B)X = Y \to \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ x - 2y + z \\ -z \end{pmatrix} = Y$$

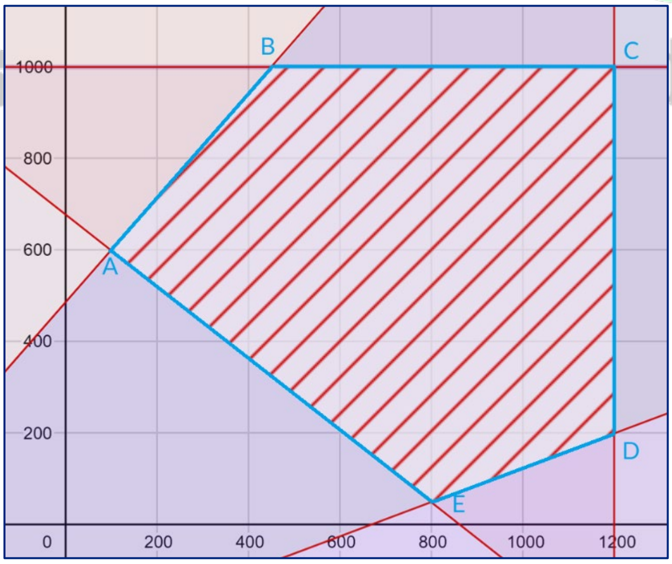
**A.2 (2 puntos) Sea $S$ la región del plano definida por:**

$$7y - 8x \leq 3400; 3x - 8y \leq 2000; 11x + 14y \geq 9500; x \leq 1200; y \leq 1000$$

a) **Represente gráficamente la región $S$ y calcule las coordenadas de sus vértices.**
b) **Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en $S$, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.**

**RESOLUCIÓN:**

a) Representación de la región factible:




Vértices de la región factible:

A: $(100,600)$
B: $(450,1000)$
C: $(1200,1000)$
D: $(1200,200)$
E: $(800,50)$

b) Cálculo del valor mínimo de $f(x,y)$:

$$f(100{,}600) = 800$$
$$f(450{,}1000) = 1900$$
$$f(1200{,}1000) = 3400$$
$$f(1200{,}200) = 2800$$
$$f(800{,}50) = 1650$$

El mínimo se alcanza en la coordenada $(100{,}600)$, obteniéndose un valor en $f$ de 800.

**A.3 (2 puntos) Considere las funciones reales de variable $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.**

**a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera: $h(x) = \begin{cases} f(x), si\ x \le 1 \\ g(x), si\ x > 1 \end{cases}$**

**¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función $h$ sea continua en $\mathbb{R}$?**

**b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de $f$ y de $g$.**

**RESOLUCIÓN:**

a) Cálculo del valor de $a$ para que la función $h(x)$ sea continua:

$$h(1) = \lim_{x\to 1^{-1}} h(x) = \lim_{x\to 1^{+}} h(x) \to 1^2 - 4(1) + 3 = 1^2 - 4(1) + 3 = -(1)^2 + a(1) + 3 \to$$
$$\to 0 = a + 2 \to a = -2$$

Para que la función sea continua, $a$ deberá ser $-2$.

b) Para calcular la región acotada por las gráficas de $f$ y $g$, se seguirá el siguiente procedimiento:

i) Crear la función $h(x)$: $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 3 - (x^2 + 2x + 3) =$

$$= x^2 - 4x + 3 + x^2 - 2x - 3 = 2x^2 - 6x \to h(x) = 2x^2 - 6x$$

ii) Obtener los puntos de corte con el eje x: $h(x) = 0 \to 2x^2 - 6x = 0 \to 2x(x-3) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

iii) Se plantea la integral definida, y se resuelve: $\left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 3x^2\right]_0^3\right|$

iv) Se aplica la Regla de Barrow: $|F(3) - [F(0)]| = \left|\frac{2(3)^3}{3} - 3(3)^2\right| = |18 - 27| = |-9| = 9\ u^2$

El área del recinto acotado del plano delimitada por las gráficas de $f$ y $g$ tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

**A.4 (2 puntos) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos $A$ y $B$. Esto es, $E = A \cup B$, Además, suponga que $P(A \cap B) = 0'2$ y que $P(B) = 0'7$**

**a) Calcule $P(A^c)$.**

**b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.**

**Nota: $A^c$ y $B^c$ son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.**

**RESOLUCIÓN:**

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario entender qué quiere decir que $E = A \cup B$. Dado que $P(E) = 1$, y que $E = A \cup B$, entonces $P(A \cup B) = 1$.

a) Para obtener $P(A^c)$, hará el siguiente procedimiento:

i) Se calcula de $P(A)$: $P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0'7 + 0'2 = 0'5$

ii) Se obtiene $P(\bar{A})$: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0'5 = 0'5$

La probabilidad de $A^C$ es del 50%.

b) Para obtener $P(A^c \cup B^c)$, hará el siguiente procedimiento: $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$

La probabilidad de $A^C \cup B^c$ es del $0\%$.

**A.5 (2 puntos) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95% para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0'2 y 0'3 los extremos de dicho intervalo.**

**a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.**
**b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?**

**RESOLUCIÓN:**

a) Para resolver este apartado, se seguirá el siguiente procedimiento:
   i) Se debe buscar el error de estimación. Teniendo en cuenta que se han dado los extremos del intervalo de confianza, puede obtenerse a partir de la longitud del mismo:

$$E = \frac{L}{2} = \frac{0'3 - 0'2}{2} = 0'05$$

El error de estimación es del $5\%$.

   ii) Obtenido el error de estimación, puede determinarse la proporción:

$$IC(\hat{p}) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \rightarrow \begin{cases} \hat{p} - 0'05 = 0'2 \\ \hat{p} + 0'05 = 0'3 \end{cases} \rightarrow \hat{p} = 0'25$$

La proporción de tornillos con defectos de fabricación es del $25\%$.

b) Para obtener el error de estimación se hará el siguiente procedimiento:
   i) Se calcula $Z_{\alpha/2}$: $1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1'96$
   ii) Ya conocido el valor de $Z_{\alpha/2}$, se calculará el error de estimación:

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \rightarrow E = 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{700}} = 0'0321 \rightarrow E = 3'21\%$$

El error de estimación, para una muestra de $700$ tornillos, con una confianza del $95\%$, es de un $3'21\%$.

# OPCIÓN B

**B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:**

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) **Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de $a$.**
b) **Resuelva el sistema para $a = 0$.**

**RESOLUCIÓN:**

a) Para discutir el sistema, se hará el siguiente procedimiento:

i) Se calcula el determinante de la matriz A, se iguala a cero, y se despeja el parámetro $a$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + a - a = -a^2 + 1 = 0 \to a^2 = 1 \to \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

ii) Se discuten los posibles tipos de sistema, mediante casos:

<u>Caso 1</u>: $a \neq 1$ y $a \neq -1$

$$\left.\begin{array}{l} |A| \neq 0 \to Rg(A) = 3 \\ |A^*| \neq 0 \to Rg(A^*) = 3 \end{array}\right\} \to Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ incógnitas \to SCD$$

<u>Caso 2</u>: $a = 1 \to A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \to Rg(A) < 3 \to |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to Rg(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to Rg(A) < 3 \to |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to Rg(A^*) = 2$$

$$\to g(A) = Rg(A^*) < Nº\ inc. \to SCI$$

<u>Caso 3</u>: $a = -1 \to A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \to Rg(A) < 3 \to |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to Rg(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0 \to Rg(A^*) = 3$$

$$\to g(A) \neq Rg(A^*) \to SI$$

<u>Solución:</u>

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, el sistema tiene una única solución.
- Si $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $a = -1$, el sistema no tiene solución.

b) Resolución del sistema:

i) En primer lugar, se obtiene el valor del determinante de la matriz A: $|A| = 1$

ii) A continuación, se resuelven los determinantes de las matrices $A_x$, $A_y$, y $A_z$; y, seguidamente, se dividen por el determinante de la matriz $A$:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 2$$

La solución será $(x, y, z) = (0,0,2)$

B.2. (2 puntos)

**a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + b$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.**

**b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.**

RESOLUCIÓN:

a) Para averiguar los valores de los parámetros $a$ y $b$, se hará el siguiente procedimiento:

i) Se resuelve $f(2)$:

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(2) = 2a + b \end{cases} \rightarrow 2a + b = 4$$

ii) Se resuelve $f'(2)$:

$$\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f'(x) = a \rightarrow f'(2) = a \end{cases} \rightarrow 0 = a$$

iii) Teniendo ya resueltos $f(2)$ y $f'(2)$, se plantea el sistema de ecuaciones; y, sobre eso, se despejan los parámetros:

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a = 0 \end{cases} \rightarrow b = 4$$

Para que se verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$, la función será $f(x) = 4x$

b) Cálculo de las asíntotas de la función $g(x)$:
Antes de comenzar a obtener las asíntotas de la función, se va a dejar la función g(x) en común denominador:

$$g(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Sobre esto, se empiezan a estudiar las asíntotas:

<u>Asíntotas Verticales:</u>

i) Se calcula el dominio de la función: $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

ii) Se calcula el límite a la izquierda y la derecha de los números que anulan al dominio:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

Conclusión: la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

<u>Asíntotas Horizontales:</u>

i) Se calcula el límite de $g(x)$ en $-\infty$ y en $\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Conclusión: la función no tiene asíntotas horizontales. Se debe comprobar si tiene asíntota oblicua

<u>Asíntota Oblicua:</u>

Para calcular la asíntota oblicua, se utilizará la ecuación punto pendiente tipo $y = mx + n$, buscando los valores de $m$ y $n$:

i) Se calcula $m$: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1$

ii) Se calcula $n$: $n = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} - (1)x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \rightarrow n = 0$

iii) Se reemplazan los valores de $m$ y $n$ en la ecuación de la recta: $y = x$

Conclusión: la función tiene una asíntota oblicua en $y = x$

**B.3. (2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, I(x), en miles de euros, vienen expresados por la función:**

$$I(x) = x\,\frac{170-0{,}85x}{5},$$

**en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.**

**a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.**

**b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $\frac{C(x)}{x}$, no supere los diez mil euros.**

**Nota: Expese los resultados con 2 cifras decimales.**

**RESOLUCIÓN:**

a) Para resolver el apartado, se hará el siguiente procedimiento:

i) Se plantea la ecuación del beneficio, definida como $B(x) = I(x) - C(x)$:

$$B(x) = x\,\frac{170-0{,}85x}{5} - (10 + 2x + x^2) = 34x - 0{,}17x^2 - 10 - 2x - x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow B(x) = -1{,}17x^2 + 32x - 10$$

La ecuación del beneficio será $B(x) = -1{,}17x^2 + 32x - 10$

ii) Se busca el máximo de la función mediante el método de la segunda derivada:

$$B'(x) = -2{,}34x^2 + 32 = 0 \rightarrow -2{,}34x^2 = -32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2{,}34} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{32}{2{,}34}} = \pm 3{,}69$$

A la hora de comprobar mediante la segunda derivada, el valor de $x = -3'69$ se ignora porque no tiene sentido económico. La cantidad de producto $(x)$ jamás puede ser negativa.

$$B''(x) = -4{,}68x \rightarrow B''(3{,}69) = -17{,}269 < 0 \rightarrow Máximo$$

La función presenta un máximo en 3'69 litros.

iii) Una vez obtenido el máximo, se reemplaza en la función de beneficios y se obtiene dicho beneficio máximo:



$$B(3{,}69) = -1{,}17(3{,}69)^2 + 32(3{,}69) - 10 = 92{,}15$$

La empresa tiene un beneficio de 92150€.

b) Para averiguar la cantidad de fertilizante, se debe igualar la función de costes medios a 10:

$$CMe(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10 + 2x + x^2}{x} = 10 \rightarrow 10 + 2x + x^2 = 10x \rightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 4 \pm \sqrt{6} = \begin{cases} x = 1{,}55 \\ x = 6{,}45 \end{cases}$$

Para que el coste medio no supere los 10000€, la cantidad de fertilizante deberá estar comprendida entre 1550 litros y 6450 litros.

**B.4. (2 puntos) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30% de las invitaciones, Berta el 40% y Carla las restantes. El 2% de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3% y 1%, respectivamente.**

**a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.**
**b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?**

**RESOLUCIÓN:**

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, se planteará el problema mediante tabla de contingencia:

| | Ana ($A$) | Berta ($B$) | Carlas ($C$) | |
|---|---|---|---|---|
| Llegan a su destino ($L$) | 0,38 | 0,27 | 0,29 | 0,94 |
| No llegan a su destino($\bar{L}$) | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,06 |
| | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 1 |

a) Probabilidad de que una carta no llegue a su destino: $P(\bar{L}) = 0{,}06$

La probabilidad de que una carta no llegue a su destino es del 6%.

b) Probabilidad de que una invitación que no llegó a su destino haya sido enviada por Ana: $P(A|\bar{L}) = \frac{0'02}{0{,}06} = 0{,}33$

La probabilidad de que una carta que no llegó a su destino haya sido por Ana es del 33%.

**B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria $X$ con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.**

**a) Calcule el valor de la media muestral.**
**b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?**

**RESOLUCIÓN:**

a) Para resolver este apartado, se seguirá el siguiente procedimiento:

i) Se debe buscar el error de estimación. Teniendo en cuenta que se han dado los extremos del intervalo de confianza, puede obtenerse a partir de la longitud del mismo:

$$E = \frac{L}{2} = \frac{185{,}875 - 157{,}125}{2} = 12{,}875$$

ii) Obtenido el error de estimación, puede determinarse el valor de la media muestral:

$$IC(\bar{x}) = (\bar{x} - E; \bar{x} + E) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} - 12{,}875 = 157{,}125 \\ \bar{x} + 12{,}875 = 185{,}875 \end{cases} \rightarrow \bar{x} = 170$$

La media muestral es de 170.

b) Para obtener el nivel de confianza, se hará el siguiente procedimiento:

i) Se calcula $Z_{\alpha/2}$ a partir del error de estimación: $E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{n}} \rightarrow Z_{\alpha/2} = \frac{12{,}875}{\sqrt{\frac{15}{9}}} = 9{,}97$

ii) Se obtiene la probabilidad asociada al valor de $Z_{\alpha/2}$: $P(Z_{\alpha/2} = 9{,}97) = 1$

iii) Se despeja el valor de $\alpha$ a partir de la probabilidad antes obtenida:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow 1 - \alpha = 1$$

El nivel de confianza para este intervalo es del 100%.