	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2019-2020** **MATERIA**: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x + ay &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ x + ay + (a+1)z &= a \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

A.2. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

A.4. (2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:
a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)
La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.
a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km

B.1. (2 puntos)

Se considera $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B.4. (2 puntos)
Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40% de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.
a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)
Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90% para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Soluciones

Ejercicio A.1

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$$

Con determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = -a^2 - a = 0$

Hay tres casos a estudiar.

Caso 1. $a \neq 0$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de A no es cero y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El **sistema es compatible determinado**.

Caso 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es cero y el rango de A no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 \neq 0$$

El rango de A es 2.

Determinamos el rango de A*.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como solo he añadido una columna con todos los elementos igual a cero, el rango de A* es 2, igual que el de A.
Rango de A = Rango de A* = 2 < 3 = número de incógnitas.
El sistema es compatible indeterminado.

Caso 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

El Rango de A = 2 y el rango de A* es 3
El sistema es incompatible.

b) Para $a = 0$ estamos en el caso 2 estudiado y el sistema es compatible indeterminado.

$$x = 0; y = \lambda; z = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Academia Bravosol – Sistemas Personalizados de Enseñanza®
Entidad Gestora de la UNED especializada en preparación de la PCE
Calle Sagasta, 4. Metro Bilbao.
910 646 842 – 689 798 987 – info@bravosol.net
www.bravosol.net

Ejercicio A.2

a) El dominio de esta función serán todos los números reales excepto aquellos que anulen el denominador:

$$3x + x^2 = x(3 + x) = 0$$
$$x = 0\,;x = -3$$

El dominio es por lo tanto $\mathbb{R} - \{-3,0\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(4 - x^2)}{\cancel{x}(3 + x)} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

b) Empezamos con las asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{16}{3} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{16}{3}$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{-5}{0^-} + 4 = +\infty \qquad \lim_{x\to -3}+\frac{4 - x^2}{3 + x} = \frac{-5}{0^+} + 4 = -\infty$$

Si hay asíntotas verticales en x = -3

Seguimos con las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \pm\infty$$

No hay asíntotas horizontales
Acabamos con las oblicuas:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4 - x^2}{3 + x} + 4}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4 - x^2 + 12 + 4x}{3 + x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2 + 4x + 16}{3x + x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y - x^2}{3 + x} + 4 + x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4 - x^2 + 12 + 4x + 3x + x^2}{3 + x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x + 16}{x + 3} = 7$$

Si hay asíntota oblicua, y su ecuación es: $y = -x + 7$

Academia Bravosol – Sistemas Personalizados de Enseñanza®
Entidad Gestora de la UNED especializada en preparación de la PCE
Calle Sagasta, 4. Metro Bilbao.
910 646 842 – 689 798 987 – info@bravosol.net
www.bravosol.net

Ejercicio A.3

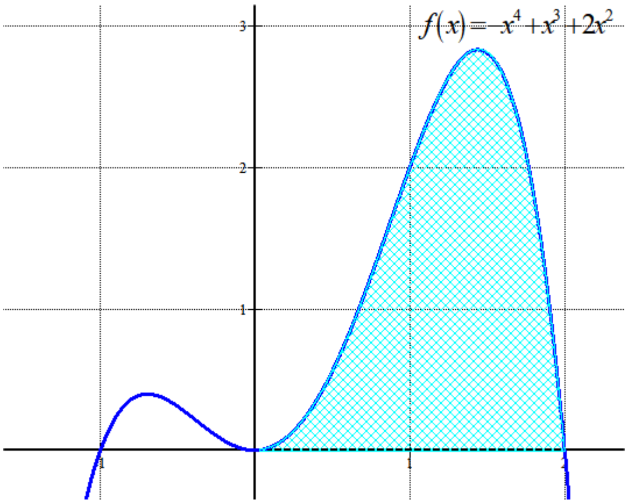
a) La ecuación de la recta tangente es:

$$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2(-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0$$
$$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \qquad f'(-1) = 4 + 3 - 4 = 3$$
$$y - 0 = 3(x+1) \qquad por\ lo\ tanto\ la\ ecuación\ es\ \ y = 3x + 3$$

b) Veamos si la función corta el eje OX.

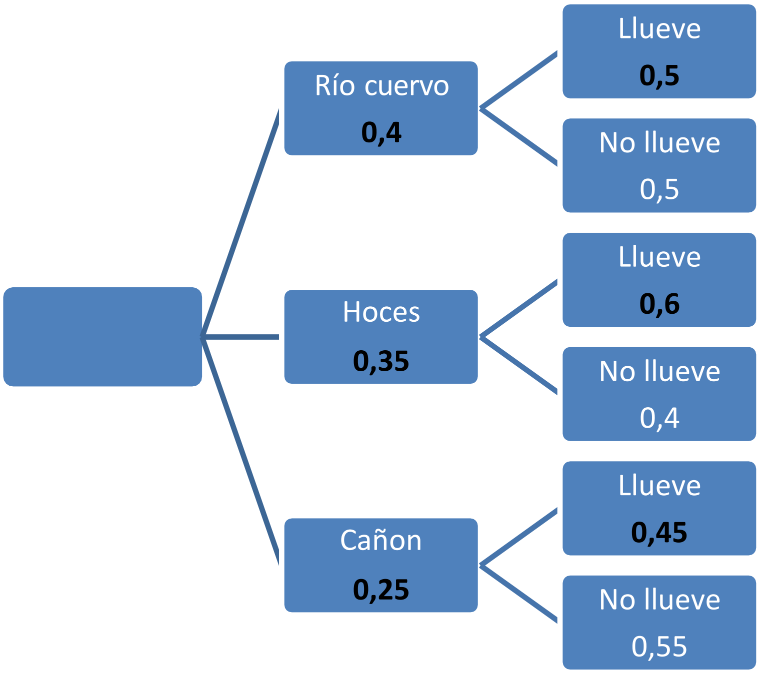
$$-x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \qquad x^2(-x^2 + x + 2) = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-1)\cdot 2}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}; \quad donde\ x = 2 \quad x = -1$$
$$\int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2)\,dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + \frac{2\cdot 2^3}{3} = \frac{44}{15}u^2$$

El recinto es:



Ejercicio A.4

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Puede suceder que no llueva de tres formas distintas, calculamos la probabilidad de cada una y las sumamos.
   p(No llueva) = 0,4 · 0,5 + 0,35 · 0,4 + 0,25 · 0,55 = 0,20 + 0,14 + 0,1375 = 0,4775

b) Aplicamos la fórmula de Bayes.

$$p(Cuervo|Llueve) = \frac{p(Cuervo \cap Llueve)}{p(Llueve)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{1 - 0{,}4775} = 0{,}3828$$

Ejercicio A.5

a) X= Longitud de escritura de un bolígrafo en km.

X=N(μ, 0.5)

Con un nivel de confianza del 95,44 %.

$1 - \alpha = 0{,}9544 \rightarrow \alpha = 0{,}0456 \rightarrow \alpha/2 = 0'0228 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9772 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2}$

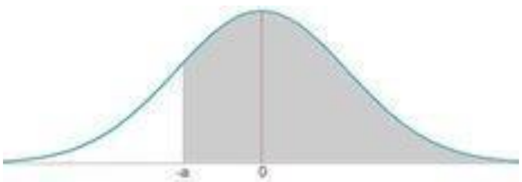
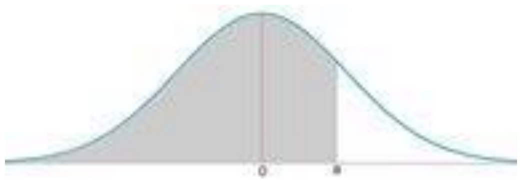
Planteamos la igualdad

$$N = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 0{,}5}{0{,}05}\right)^2 = 400$$

La muestra debe ser de más de 400 bolígrafos.

b) Para una distribución muestral de 16 bolígrafos $N\left(2; \frac{0{,}5}{\sqrt{16}}\right) = N\left(2; \frac{1}{8}\right)$
Si queremos que escriba más de 30 km es porque cada bolígrafo deberá escribir 30/16 km

$$p\left(x \geq \frac{30}{16}\right) = p(x \geq 1{,}875) = p\left(z \geq \frac{1{,}875 - 2}{\frac{1}{8}}\right) = p(z \geq -1) = p(z \leq 1) = 0.8413$$


=

=

Ejercicio B.1

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix}$$

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \qquad 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \, donde \; x = 4$$

b) Calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \; \neq 0 \; La\ matriz\ es\ invertible$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ejercicio B.2

a) Dibujamos las rectas asociadas a las expresiones que definen la región del plano.

$x = 3, y = 0, y = 15,$

$y - 5 + \frac{x}{2} = 0$

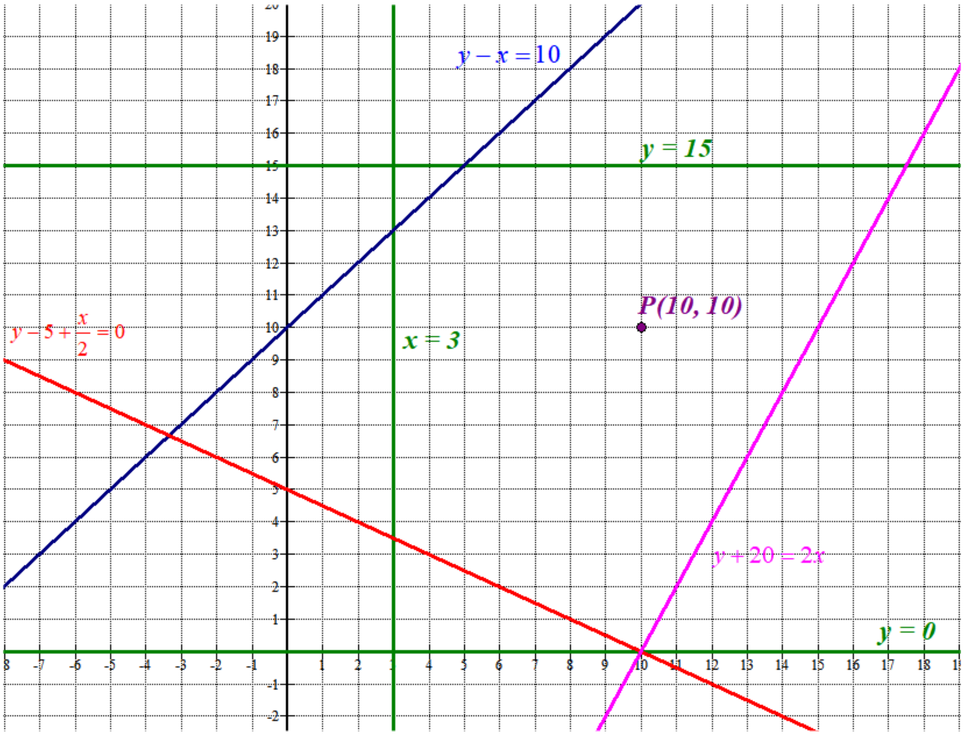
x	$y = 5 - \frac{x}{2}$
0	5
10	0

$y - x = 10,$

x	$y = x + 10$
0	10
-10	0

$y + 20 = 2x$

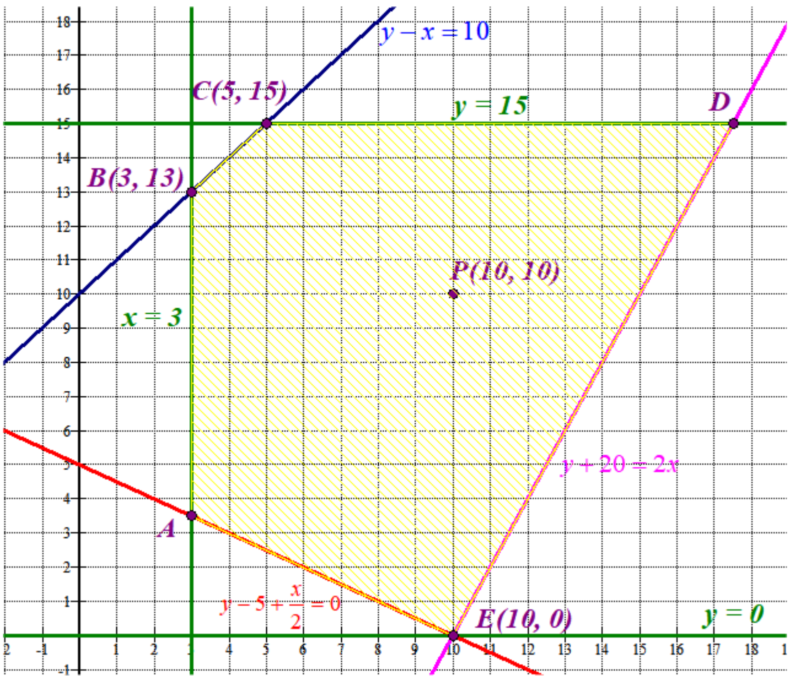
x	$y = 2x - 20$
0	-20
10	0



Comprobamos si el punto P(10, 10) cumple las condiciones del ejercicio.

$$10 \geq 3, \quad 0 \leq 10 \leq 15,\ 10 - 5 + \frac{10}{2} \geq 0,\ 10 - 10 \leq 10,\ 10 + 20 \geq 20$$

Se cumplen todas, por lo que la región es la zona sombreada del dibujo.



Las coordenadas de los puntos A y D lo obtenemos resolviendo el sistema correspondiente.

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y-5+\frac{x}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y-5+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow y=\frac{7}{2} \Rightarrow A\left(3,\frac{7}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 15 \\ y+20 &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 15+20=2x \Rightarrow x=\frac{35}{2} \Rightarrow D\left(\frac{35}{2},15\right)$$

b) Valoramos la función $f(x,y)=x+y$ en cada uno de los vértices de la región.

$A\left(3,\frac{7}{2}\right) \rightarrow f\left(3,\frac{7}{2}\right)=3+\frac{7}{2}=6.5$

B(3, 13) $\rightarrow f(3,13)=3+13=16$

C(5, 15) $\rightarrow f(5,15)=5+15=20$

$D\left(\frac{35}{2},15\right) \rightarrow f\left(\frac{35}{2},15\right)=\frac{35}{2}+15=32.5$

E(10, 0) $\rightarrow f(10,0)=10+0=10$

El valor mínimo se alcanza en el punto $A\left(3,\frac{7}{2}\right)$ siendo este valor mínimo de 6.5

El valor máximo se alcanza en el punto $D\left(\frac{35}{2},15\right)$ siendo este valor máximo de 32.5.

Ejercicio B.3

a) El dominio es todo R puesto que la función exponencial no presenta problemas de dominio. Para que la recta tangente sea horizontal, su derivada tiene que ser igual a cero puesto que la pendiente es cero en este tipo de rectas.

$$f'(x) = 3\left[e^{-\frac{x}{2}} + (x+k)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right] = 3e^{-\frac{x}{2}}\left[1 + (x+k)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 3e^{-\frac{x}{2}}\left[1 - \frac{x}{2} - \frac{k}{2}\right] = 0$$

$$f'(1) = 3e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k-1}{2}\right) = 0 \qquad \left(\frac{k-1}{2}\right) = 0; \quad k = 1$$

$$f(1) = 3(1+1)\cdot e^{-1/2} = \frac{6}{\sqrt{e}}$$

Finalmente, la ecuación es $y = \frac{6}{\sqrt{e}}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento los estudiamos con los signos de la primera derivada.

$$f'(x) = 3e^{-\frac{x}{2}}\left[\frac{1-x}{2}\right] = 0 \qquad \left(\frac{1-x}{2}\right) = 0 \qquad x = 1$$

Para el intervalo (-∞, 1) el signo de la primera derivada es positivo, por lo tanto, la función crece.

Para el intervalo (1,+∞) el signo de la primera derivada es negativo, por lo tanto, la función crece.

Ejercicio B.4

a) Utilizamos el suceso contrario. El suceso contrario a "Se estropee al menos uno de ellos" es "No se estropea ninguno".
La probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos es 1 menos la probabilidad de que no se estropee ninguno.
P(se estropee al menos uno de ellos) = 1 – P(no se estropee ninguno) ={Sucesos independientes} = 1 – P(no se estropee el microondas) · P(No se estropee el horno) =
= 1 – 0,98 · 0,95 = $\boxed{0{,}069}$

b) P(Se estropee el microondas y conserve la garantía) = P(Se estropee el microondas) · P(Conserve la garantía / se ha estropeado) = 0,02 · (1 – 0,4) = 0,02 · 0,6 = $\boxed{0{,}012}$

Ejercicio B.5

X= Consumo de agua de un programa de lavado.

X=N (μ, 7)

a) n = 10

$$\bar{x} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 41$$

Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \propto = 0{,}90 \rightarrow \propto = 0{,}1 \rightarrow \propto/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

El error del intervalo de confianza es:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 3.641.$$

El intervalo de confianza sería:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (41 - 3.641, 41 + 3.641) = (37.359, 44.641)$$

b) n = 64

Si el intervalo de confianza tiene longitud 5 el error es la mitad 2.5 litros.
Utilizando la fórmula del error tenemos:

$$Error = 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} = 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.5 \cdot 8}{7} = 2.86$$

Buscando en la tabla de la N (0, 1) tenemos que 1 – ∝/2 = 0.9979.

1 – ∝/2 = 0.9979 → ∝/2 = 0.0021 → ∝ = 0.0042 → 1 – ∝ = 0.9958

El nivel de confianza es del 99,58%.