| DATOS DEL PARTICIPANTE | |
|---|---|
| APELLIDOS: | |
| NOMBRE: | Nº Documento Identificación: |
| Instituto de Educación Secundaria: | |

## EJERCICIO

**Cuestión 1ª. (2.5 puntos).**

En una tienda venden 3 tipos de bombillas: incandescentes (precio 2 €), fluorescentes (precio 4 €) y leds (precio 1.50 €). Una semana venden en total 90 bombillas, ingresando 190 € y vendiendo el doble de bombillas leds que de las incandescentes y fluorescentes juntas.

a) Escriba un sistema de ecuaciones con la situación planteada.

b) Obtenga el número de bombillas vendido de cada tipo.

**Cuestión 2ª. (2.5 puntos).**

En una heladería el beneficio, en euros, se expresa con la función $B(x) = -x^2 + 80x - 1200$ , siendo *x* el número de helados vendidos.

a) ¿Cuál es el beneficio si venden 30 helados?

b) ¿Cuántos helados tienen que vender para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

c) Halla $\int_{30}^{60} B(x)\,dx$

**Cuestión 3ª. (2.5 puntos).**

Dados los vectores $\vec{u} = \left(2, \frac{1}{5}, -1\right)$ y $\vec{v} = (0, 3, -5)$

a) Calcula el área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el perímetro de dicho paralelogramo.

c) Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto P(-3, 2, 6) y contiene al paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**Cuestión 4ª. (2.5 puntos).**

Alejandro va al trabajo el 10% de las veces en coche, el 30% en autobús y el resto en metro. Cuando va en metro llega tarde el 10% de las veces, si va en autobús llega tarde el 25% de las veces y si va en coche el 30%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día vaya en metro y llegue tarde?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde al trabajo, sea cual sea el medio de transporte utilizado?

c) Si un día llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?

**Cuestión 1. En una tienda venden 3 tipos de bombillas: incandescentes (precio 2 €), fluorescentes (precio 4 €) y leds (precio 1.50 €). Una semana venden en total 90 bombillas, ingresando 190 € y vendiendo el doble de bombillas leds que de las incandescentes y fluorescentes juntas.**

**a. Escriba un sistema de ecuaciones con la situación planteada.**

**b. Obtenga el número de bombillas vendido de cada tipo.**

a. Vamos a llamar x al número de bombillas incandescentes, y al número de fluorescentes, y z al número de LEDs que se venden en una semana. Como en una semana se venden 90 bombillas, la suma de estos tres tiene que ser noventa: $x+y+z=90$. En ese tiempo, lo que se ingresa por las bombillas incandescentes es $2x$ (dos euros por cada bombilla), con las fluorescentes, $4y$, y con las LED, $1,5z$. En total se ingresan 190 euros: $2x+4y+1.5z=190$. Por último, nos dicen que el número de LEDs (z) vendidos es el doble de las incandescentes y fluorescentes juntas (x+y), así que $z=2(x+y)$. Entonces, el sistema de ecuaciones es

$$x+y+z=90 \tag{1}$$
$$2x+4y+1.5z=190 \tag{2}$$
$$2x+2y-z=0. \tag{3}$$

b. Podemos resolver esta ecuación mediante el método de Cramer. Codificamos el sistema con la matriz

$$(A|b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & |90\\ 2 & 4 & 1.5 & |190\\ 2 & 2 & -1 & |0\end{pmatrix} \tag{4}$$

El determinante de $A$ es $-4+3+4-8+2-3=-6$

$$x=\frac{\Delta x}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}90 & 1 & 1\\ 190 & 4 & 1.5\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{-60}{-6}=10 \tag{5}$$

$$y=\frac{\Delta y}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 90 & 1\\ 2 & 190 & 1.5\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{-120}{-6}=20 \tag{6}$$

y, como $z=2(x+y)$, $z=2(20+10)=60$.

**Cuestión 2. En una heladería el beneficio, en euros, se expresa con la función B(x)=$-x^2+80x-1200$, siendo x el número de helados vendidos.**
**a. ¿Cuál es el beneficio si venden 30 helados?**
**b. ¿Cuántos helados tienen que vender para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?**
**c. Calcula $\int_{30}^{60} B(x)dx$**

a. Si la heladería vende $x$ helados, saca un beneficio de $B(x)=-x^2+80x-1200$. Por tanto, si venden 30 helados, se llevarán $B(30)=-30^3+80\cdot 30-1200=300$ euros de beneficio.

b. Queremos encontrar el número de helados que maximiza la función. Para ello, derivamos el beneficio e igualamos la derivada a cero.

$$B(x)'=-2x+80=0\rightarrow x=40. \tag{7}$$

El beneficio máximo es cuando venden 40 helados. Será $B(40)=-40^2+80\cdot 40-1200=400$ euros.

c. Para calcular $\int_{30}^{60} B(x)dx$ empezamos calculando la primitiva

$$\int B(x)dx=-\frac{x^3}{3}+40x^2-1200x. \tag{8}$$

A continuación aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_{30}^{60} B(x)dx=-\frac{x^3}{3}+40x^2-1200x|_{30}^{60}=(-60^3/3+40\cdot 60^2-1200\cdot 60)-(-30^3/3+40\cdot 30^2-1200\cdot 30)=9000. \tag{9}$$

**Cuestión 3. Dados los vectores $\vec{u}$ =(2, 1/5 ,−1) y $\vec{v}$ =(0,3,−5)**

**a. Calcula el área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

**b. Obtén el perímetro de dicho paralelogramo**

**c. Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto P(-3, 2, 6) y contiene al paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

a. El área del paralelogramo es, por definición,

$$A = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1/5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-i+6k)-(-10j-3i)| = \frac{1}{2}|(2,10,6)| = \frac{1}{2}\sqrt{16+100+36} = \frac{\sqrt{152}}{2}u^2. \quad (10)$$

b. El perímetro será la suma de la longitud de los lados. Dos de sus lados son como $\vec{u}$, así que miden $|\vec{u}| = \sqrt{2^2+(1/5)^2+(-1)^2} = \sqrt{126}/5$. Los otros dos son como $\vec{v}$, así que miden $|\vec{v}| = \sqrt{0^2+3^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$. Así, en total, el perímetro es

$$2\sqrt{126}/5 + 2\sqrt{34}. \quad (11)$$

c. Para construir un plano necesitamos un punto y un vector normal. El punto puede ser el propio $P(-3,2,6)$, y el vector normal será $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = (2,10,6)$, como calculamos en el apartado a.

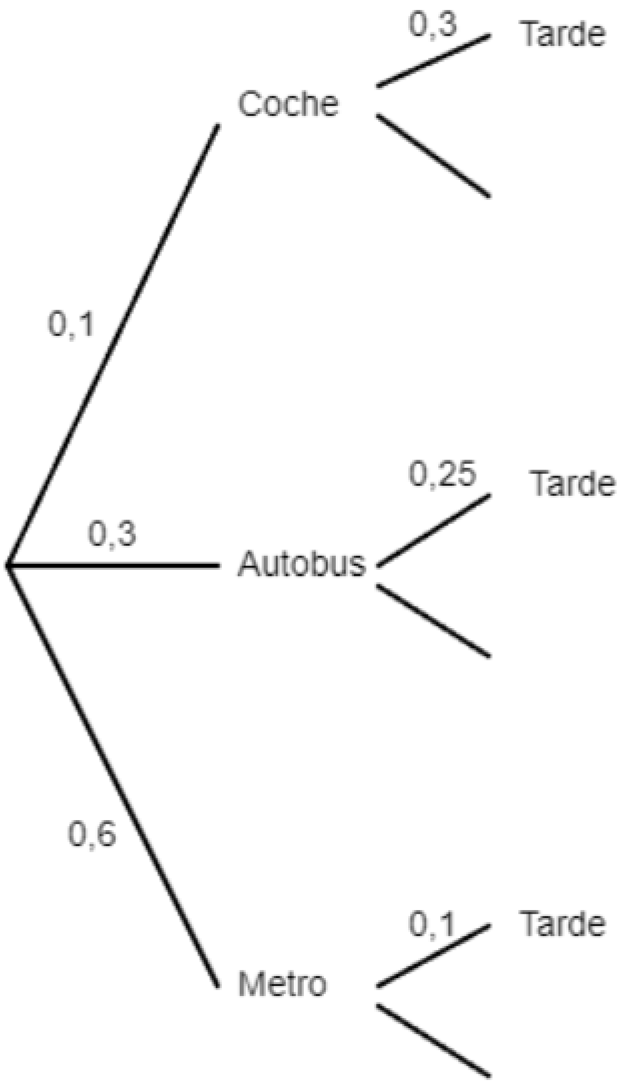
Con esto, los planos que contienen al paralelogramo son de la forma $2x+10y+6z+D=0$, y como queremos que contenga a P, necesitamos que se cumpla $2\cdot(-3)+10\cdot 2+6\cdot 6+D=0$. Esto se cumple si $D=-50$. Por tanto, el plano es

$$2x+10y+6z-50=0. \quad (12)$$

**Cuestión 4. Alejandro va al trabajo el 10% de las veces en coche, el 30% en autobús y el resto en metro. Cuando va en metro llega tarde el 10% de las veces, si va en autobús llega tarde el 25% de las veces y si va en coche el 30%.**

**a. ¿Cuál es la probabilidad de que un día vaya en metro y llegue tarde?**
**b. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde al trabajo, sea cual sea el medio de transporte utilizado?**
**c. Si un día llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?**

Podemos dibujar un arbol de probabilidades con los datos que tenemos:




a. La probabilidad de que vaya en metro y llegue tarde es



$$P(metro \cap tarde) = P(metro)P(tarde|metro) = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06 = 6\%. \tag{13}$$

b. La probabilidad de que llegue tarde es

$$P(tarde) = P(metro \cap tarde) + P(autobus \cap tarde) + P(coche \cap tarde). \tag{14}$$

Cada una de estas se calcula como en el apartado a, dando

$$P(tarde) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,165. \tag{15}$$

c. Podemos calcular la probabilidad de que haya venido en autobús sabiendo que llega tarde con el teorema de Bayes:

$$P(autobs|tarde) = \frac{P(autobus \cap tarde)}{P(tarde)} = \frac{0,075}{0,165} = 0,45. \tag{16}$$