Instrucciones generales

El examen tiene una duración máxima de 90 minutos.

Sólo se permite usar bolígrafo azul o negro.

Se permite usar calculadora científica no programable.

Está prohibido el uso de corrector.

Debe contestarse en el papel que se facilite, y contestar las cuestiones simples en las casillas disponibles.

Criterios de Evaluación

La prueba tiene cuatro apartados, y la puntuación máxima es de 10 puntos:

APARTADO 1. (2,5 puntos)

Debe escogerse entre una de las dos preguntas que se dan, haciendo todos los apartados. Los cálculos deben estar explicados antes de realizar las operaciones, y todos los resultados que se obtengan deberán estar explicados y justificados. Se penalizarán las faltas de ortografía.

APARTADO 2. (2,5 puntos)

Debe escogerse entre una de las dos preguntas que se dan, haciendo todos los apartados. Los cálculos deben estar explicados antes de realizar las operaciones, y todos los resultados que se obtengan deberán estar explicados y justificados. Se penalizarán las faltas de ortografía.

APARTADO 3. (2,5 puntos)

Se deben responder 5 de las 8 preguntas que se plantean. Cada pregunta tiene tres opciones, a), b) y c), siendo únicamente una de ellas correcta. Los aciertos suman 0,5 puntos, los errores restan 0,2 puntos; y las que se dejen en blanco no puntúan.

APARTADO 4. (2,5 puntos)

Este ejercicio se enfoca desde un punto teórico-práctico. Se propondrá un escenario a partir de un texto; y en base a él, se propondrán una serie de preguntas orientadas a relacionar teoría con práctica.

APARTADO 1

EJERCICIO 1.1

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo (1 punto).

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas (1,5 puntos).

EJERCICIO 1.2

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Plantee las restricciones del problema (0,5 puntos)

b) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores (1 punto).

c) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, plantee la función de beneficio (0,5 puntos), y obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar dicho beneficio (0,5 puntos).

APARTADO 2

EJERCICIO 2.1

La derivada de la función real de la variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función sabiendo que pasa por el punto (0,3) (0,5 puntos).

b) Estudie la monotonía de la función y determine sus extremos relativos (1 punto).

c) Determine, si existen, los puntos de inflexión de la función $f(x)$ (1 punto).

EJERCICIO 2.2

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) **Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates (1 punto).**

b) **Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95% (0,5 puntos).**

c) **Determine el nivel de confianza para que, tomando una muestra de 144 centros el valor absoluto del error de estimación sea de $\pm 2,25$ euros (1 punto).**

APARTADO 3

1 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio con $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$, y $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$, la probabilidad del suceso $P(A|B^c)$ será:

a) 0,25

b) 0,5

c) 0,75

2 Usando los datos del ejercicio anterior, la probabilidad del suceso $A \cup B$ será:

a) 0,9.

b) 1,4.

c) 0,7.

3 Dada la función $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$:

a) La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b) La función es siempre decreciente en todo su dominio.

c) La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

4 Considerando la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, el parámetro $k \in \mathbb{R}$ será::

a) $k - 1$.

b) $k = 0$.

c) $k = 1$.

5 Considerando la función del ejercicio anterior, y asumiendo $k = 0$, el valor del recinto plano acotado entre la función $f(x)$, el eje de abscisas, y los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$ será:

a) $\frac{e^2-1}{e} + \frac{2}{3}$.

b) $\frac{e-1}{e} + \frac{2}{3}$.

c) $\frac{e-1}{e} - \frac{2}{3}$.

6 En una fábrica, el control de calidad de cierto producto pasa por tres fases. En el momento en el que una unidad no supere dicho en cualquiera de las etapas será rechazada. Considerando que la probabilidad de que se rechace en el primer control de calidad es de un 1%, de que se rechace en el segundo control 0,86%, y en el tercer control es de un 0,23%; así como no hay ningún tipo de dependencia en la aceptación el rechazo de una unidad de producto, ¿cuál es la probabilidad de que sea rechazada una unidad?

a) 2,09%.

b) 2,11%.

c) 2,13%.

7 Considerando su respuesta en el ejercicio anterior, si se produjera un lote de 10.000 unidades, ¿cuántas unidades se aceptarían?

a) Al menos 9700 unidades.

b) Como máximo 9710 unidades.

c) Ambas opciones son correctas.

8 El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos. En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. El número de mochilas seleccionadas en la muestra fue:

a) 196 mochilas.

b) 144 mochilas.

c) No puede resolverse, no hay suficiente información.

APARTADO 4

Se tienen tres cajas, A, B y C. La caja A contiene 2 bolas rojas, 3 bolas verdes y 2 bolas negras; la caja B contiene 4 bolas rojas y 3 bolas negras; y, la caja C contiene 1 bola roja, 5 bolas verdes y 1 bola morada.

Para escoger de qué caja se extrae una bola, se tira un dado trucado de ocho caras en el que se obtiene el resultado 8 en 5 de cada 8 tiradas (el resto de números son equiprobables). Al tirar el dado, si el resultado está comprendido entre 1 y 4, ambos inclusive, se extrae una bola de la caja A; si se obtiene un resultado comprendido entre 5 y 6, ambos inclusive, se extrae de la caja B; y, si se obtuviera 7 y 8, ambos inclusive, de la caja C.

Considerando esta información:

a) **Plantee cuál es la probabilidad que se tiene de escoger cada una de las cajas (1 punto).**

b) **Calcule la probabilidad de obtener una bola roja (0,5 puntos).**

c) **Determine la probabilidad de que, habiéndose sacado una bola roja, venga de la caja B (0,5 puntos).**

d) **Si se extrajo una bola de color morado, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la caja A?**

SOLUCIONES

APARTADO 1

EJERCICIO 1.1

Se consideran las siguientes matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante $\boldsymbol{k}$ para que el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{B}$ sea nulo.

RESOLUCIÓN

Para determinar si el determinante de la ecuación matricial $A-2B$ es nulo, debe, primeramente, resolverse dicha ecuación matricial:

$$A-2B=\begin{pmatrix}k & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 8 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -8 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ya con la matriz resuelta, puede resolverse $|A-2B|=0$ con el fin de despejar el parámetro k:

$$|A-2B|=\begin{vmatrix}k-2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -8 & 0 & 1\end{vmatrix}=2(k-2)-24-1=0\rightarrow 2k-4-24-1=0\rightarrow 2k=29\rightarrow k=\frac{29}{2}$$

CONCLUSIÓN

Para que el determinante sea nulo, k deberá valer $\frac{29}{2}$.

b) Determínese si las matrices $\boldsymbol{C}$ y $(\boldsymbol{C}^{t}\cdot\boldsymbol{C})$, donde $\boldsymbol{C}^{t}$ denota la matriz traspuesta de $\boldsymbol{C}$, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

RESOLUCIÓN

Para que una matriz pueda ser invertible, es necesario que ésta sea cuadrada. Teniendo esto en cuenta, y dado que la matriz C es rectangular, ésta no será invertible.

En cuanto a $C^{t}\cdot C$, es necesario, en primer lugar, determinar la traspuesta de C:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow C^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Seguidamente, se comprueban las dimensiones del producto $C^t \cdot C$:

$$C^t_{2\times3} \cdot C_{3\times2} = (C^t \cdot C)_{2\times2}$$

Como el resultado es una matriz cuadrada, es susceptible de que exista inversa.

Así pues, se calculará $C^t \cdot C$, y a continuación se calculará su determinante:

$$C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|C^t \cdot C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Como el determinante $C^t \cdot C$ es no nulo, la matriz tiene inversa; y, por tanto, puede calcularse. Así las cosas, el siguiente paso es obtener la matriz adjunta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 2 & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A continuación, se traspone la matriz adjunta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la inversa de la matriz se puede resolver mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t \to A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2/_3 & -{}^1/_3 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 \end{pmatrix}$$

CONCLUSIÓN

La matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^2/_3 & -{}^1/_3 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 1.2

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Plantee las restricciones del problema (0,5 puntos)

RESOLUCIÓN

En primer lugar, es necesario definir a qué se corresponderán las variables "x" e "y". En el caso de este ejercicio, "x" se corresponder con los litros de helado; e "y" se corresponderá a los litros de horchata.

Partiendo de esta idea, se pueden definir las siguientes relaciones:

"[…] cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y […]un litro de horchata 2 horas" $x + 2y \leq 20$

"Sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado" $x \leq 15$

"Tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata" $x + y \geq 10$

Aparte de estas restricciones, de forma implícita no puede haber cantidades negativas, por lo tanto:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

CONCLUSIÓN

Las restricciones del ejercicio son:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores (1 punto).

RESOLUCIÓN

A la hora de representar la región determinada por las restricciones, es necesario utilizar tabla de valores en aquellas en las que aparezcan las dos variables a la vez (en este caso, sería para $x + 2y \leq 20$, y para $x + y \geq 10$). Así las cosas, los puntos que delimitan a las inecuaciones son:

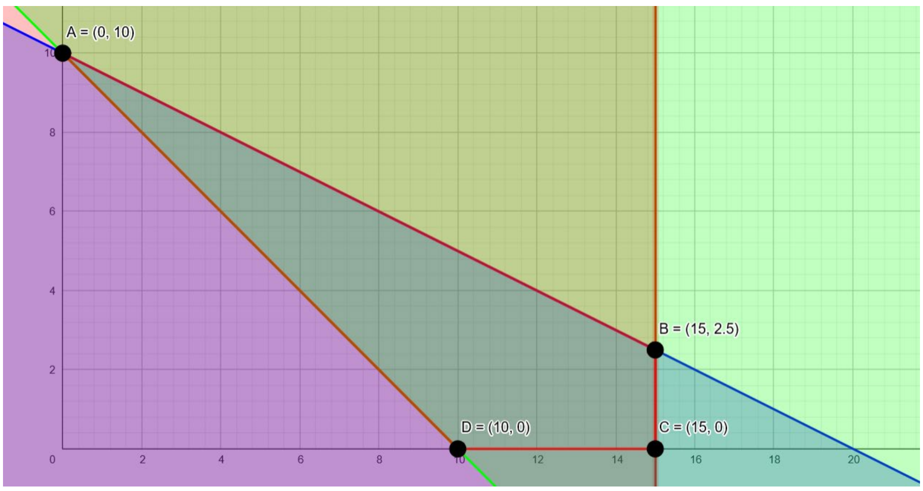
$x + 2y \leq 20$

x	y
0	20
10	0

$x + y \geq 10$

x	y
0	10
10	0

Contando con esta información, puede representarse la región factible



c) **Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, plantee la función de beneficio (0,5 puntos), y obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar dicho beneficio (0,5 puntos).**

RESOLUCIÓN

Para determinar el beneficio máximo (B), es necesario, primeramente, plantear la ecuación que define los beneficios. Se indica que el beneficio de cada litro de helado es de 25 euros; y, de cada litro de horchata, de 12 euros. Considerando esta información, la función objetivo será:

$$B(x,y) = 25x + 12y$$

Seguidamente, se reemplazará cada coordenada que delimita a la región factible en la función de beneficios:

$$\begin{gathered} B_A(0;10) = 25 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 120 \\ B_B(15;2{,}5) = 25 \cdot 15 + 12 \cdot 2{,}5 = 405 \\ B_C(15;0) = 25 \cdot 15 + 12 \cdot 10 = 300 \\ B_D(10;0) = 25 \cdot 10 + 12 \cdot 10 = 250 \end{gathered}$$

La coordenada que es escogerá es aquella en la que se haya obtenido el valor máximo en la función de beneficios; es decir, el punto (15;2,5).

CONCLUSIÓN

Se deberán producir 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata, obteniéndose un beneficio máximo de 405€.

APARTADO 2

EJERCICIO 2.1

La derivada de la función real de la variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x^2 - 4x - 6}$$

a) **Obténgase la expresión de la función sabiendo que pasa por el punto $(0,3)$ (0,5 puntos).**

RESOLUCIÓN

Al pedir que se obtenga la expresión de la función, se está pidiendo realmente que se calcule la función $f(x)$. Para obtenerla, primeramente debe calcularse la integral de la función dada; y, seguidamente, imponer la condición de que pase por el punto $(0{,}3)$; es decir, $f(0) = 3$:

$$f(x) = \int (2x^2 - 4x - 6)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + c$$

Sobre esto, se impone la condición antes mencionada con el fin de despejar c:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + c \\ f(0) = 3 \end{array}\right\} \to f(0) = \frac{2(0)^3}{3} - 2(0)^2 - 6(0) + c = 3 \to c = 3$$

CONCLUSIÓN

La expresión de la función $f(x)$ es $f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$.

b) Estudie la monotonía de la función y determine sus extremos relativos (1 punto).

RESOLUCIÓN

Para estudiar la monotonía de la función, se necesitan tener dos datos: el dominio de la función, y los puntos críticos de la misma.

En cuanto al dominio de la función, al tratarse de una función polinómica, su dominio son todos los números reales. Esto implica que no existe ningún valor de x en el que la función f no tenga imagen.

Con respecto de los puntos críticos, para obtenerlos, se debe despejar x a partir de imponer $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Con esa información, el siguiente punto es definir los intervalos que conforman al dominio de la función, dividiéndolo en trozo con los puntos críticos. Seguidamente, es escogerá un número dentro de cada uno de los trozos resultantes, y posteriormente se reemplazará en $f'(x)$. En caso de que el signo resultante sea positivo, la función será creciente; y, en caso contrario, decreciente:

Dominio	$(-\infty, -1)$	$(-1,3)$	$(3, +\infty)$
Valor de x	-2	0	4
Signo de $f'(x)$	<0	>0	<0
Interpretación	Decrece	Crece	Decrece
Extremo relativo	Mínimo	Máximo	

CONCLUSIÓN

La función es creciente en el intervalo $(-1,3)$, y es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(3, +\infty)$. Presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, y un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 3$.

c) Determine, si existen, los puntos de inflexión de la función $f(x)$ (1 punto).

RESOLUCIÓN

Para determinar la existencia de puntos de inflexión, debe despejarse x imponiendo $f''(x) = 0$. Dado que no se dispone de $f''(x)$, es necesario calcularla en primer lugar:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 \rightarrow f''(x) = 4x - 4 = 0 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$$

CONCLUSIÓN

La función presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 2.2

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) **Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates (1 punto).**

RESOLUCIÓN

Para obtener el intervalo de confianza para el precio medio se aplicará la siguiente fórmula, adaptándola a la varianza poblacional:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

El dato $\bar{x}$ se corresponde con el precio medio muestral ($\bar{x} = 34$). En cuanto a $z_{\alpha/2}$, es un dato que depende de $1-\alpha$ (este dato se calculará en el párrafo siguiente). Con respecto a, σ^2 se corresponde con la varianza de la población. Finalmente, n es el tamaño de la muestra ($n = 64$).

Con respecto a $z_{\alpha/2}$, para obtener su valor, es necesario determinar cuál es el estadístico (en adelante, t) asociado al nivel de confianza dado en el ejercicio (en este caso, $1-\alpha = 0{,}992$). Ese porcentaje se obtiene usando el siguiente cálculo:

$$t = 1 - \frac{1-(1-\alpha)}{2} \to t = 1 - \frac{1-0{,}992}{2} = 0{,}996$$

Una vez obtenido el estadístico anteriormente comentado, se busca en la tabla de la Distribución Normal el valor crítico z que se asocia a dicho estadístico:

$$t = 0{,}996 \to z = 2{,}65$$

Ya teniendo este dato, puede determinarse el intervalo de confianza:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) \to IC(\bar{x})_{0{,}992} = \left(34 \pm 2{,}65 \cdot \sqrt{\frac{49}{64}}\right) = (34 \pm 2{,}32) = (31{,}68; 36{,}32)$$

CONCLUSIÓN

El precio medio mensual de las clases del curso de Pilates estará comprendido entre 31,68 euros y 36,32 euros, con una confianza de 99,2%.

b) **Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95% (0,5 puntos).**

RESOLUCIÓN

Para determinar el tamaño de la muestra es necesario despejarla a partir del error de estimación (E), adaptándola a que se dio la varianza poblacional:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \sigma^2$$

A partir de esta relación, es necesario identificar a qué se corresponde E (por los datos del ejercicio, 3), así como determinar el valor de $z_{\alpha/2}$.

Con respecto al valor de $z_{\alpha/2}$, se obtendrá igual que en el caso anterior, se obtendrá siguiendo el mismo procedimiento:

$$t = 1 - \frac{1-(1-\alpha)}{2} \rightarrow t = 1 - \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}975 \rightarrow z = 1{,}96$$

Con el valor de z obtenido, puede calcularse el tamaño de la muestra:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \sigma^2 \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96}{3}\right)^2 \cdot 49 = 20{,}91 \cong 21$$

CONCLUSIÓN

Para que el error no supere los 3 euros, con una confianza del 95%, el tamaño de la muestra deberá ser de al menos 21 centros.

c) **Determine el nivel de confianza para que, tomando una muestra de 144 centros el valor absoluto del error de estimación sea de $\pm 2,25$ euros (1 punto).**

RESOLUCIÓN

Para obtener el nivel de confianza, primeramente, debe despejarse el valor $z_{\alpha/2}$ a partir del error de estimación:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

El valor de $z_{\alpha/2}$ se obtendrá reemplazando los datos del error ($E = 2{,}25$), la muestra ($n = 144$), y la varianza ($\sigma^2 = 49$):

$$z_{\alpha/2} = \frac{E}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2{,}25}{\sqrt{\frac{49}{144}}} = 3{,}86$$

Ya con el valor de z obtenido, es necesario averiguar cuál es estadístico (t) asociado a $z = 3{,}86$:

$$t = P(z = 3{,}86) = 0{,}9999$$

Una vez averiguado el estadístico, puede obtenerse el nivel de confianza $(1-\alpha)$ mediante la siguiente fórmula:

$$1-\alpha = 1 - 2(1-t) \rightarrow 1-\alpha = 1 - 2(1-0{,}9999) \rightarrow 1-\alpha = 0{,}9998 \equiv 99{,}98\%$$

CONCLUSIÓN

Para que el valor absoluto del error de estimación sea de $\pm 2{,}25$ euros, tomando una muestra de 144 centros, el nivel de confianza $1-\alpha$ deberá ser de un 99,98%.

APARTADO 3

1 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio con $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$, y $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$, la probabilidad del suceso $P(A|B^c)$ será:

a) 0,25

b) 0,5

c) 0,75

2 Usando los datos del ejercicio anterior, la probabilidad del suceso $A \cup B$ será:

a) 0,9.

b) 1,4.

c) 0,7.

3 Dada la función $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$:

a) La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b) La función es siempre decreciente en todo su dominio.

c) La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

4 Considerando la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, el parámetro $k \in \mathbb{R}$ será::

a) $k - 1$.

b) $k = 0$.

c) $k = 1$.

5 Considerando la función del ejercicio anterior, y asumiendo $k = 0$, el valor del recinto plano acotado entre la función $f(x)$, el eje de abscisas, y los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$ será:

a) $\frac{e^2-1}{e} + \frac{2}{3}$.

b) $\frac{e-1}{e} + \frac{2}{3}$.

c) $\frac{e-1}{e} - \frac{2}{3}$.

6 En una fábrica, el control de calidad de cierto producto pasa por tres fases. En el momento en el que una unidad no supere dicho en cualquiera de las etapas será rechazada. Considerando que la probabilidad de que se rechace en el primer control de calidad es de un 1%, de que se rechace en el segundo control 0,86%, y en el tercer control es de un 0,23%; así como no hay ningún tipo de dependencia en la aceptación el rechazo de una unidad de producto, ¿cuál es la probabilidad de que sea rechazada una unidad?

a) 2,09%.

b) 2,11%.

c) 2,13%.

7 Considerando su respuesta en el ejercicio anterior, si se produjera un lote de 10.000 unidades, ¿cuántas unidades se aceptarían?

a) Al menos 9700 unidades.

b) Como máximo 9710 unidades.

c) Ambas opciones son correctas.

8 El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos. En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. El número de mochilas seleccionadas en la muestra fue:

a) 196 mochilas.

b) 144 mochilas.

c) No puede resolverse, no hay suficiente información.

APARTADO 4

Se tienen tres cajas, A, B y C. La caja A contiene 2 bolas rojas, 3 bolas verdes y 2 bolas negras; la caja B contiene 4 bolas rojas y 3 bolas negras; y, la caja C contiene 1 bola roja, 5 bolas verdes y 1 bola morada.

Para escoger de qué caja se extrae una bola, se tira un dado trucado de ocho caras en el que se obtiene el resultado 8 en 5 de cada 8 tiradas (el resto de números son equiprobables). Al tirar el dado, si el resultado está comprendido entre 1 y 4, ambos inclusive, se extrae una bola de la caja A; si se obtiene un resultado comprendido entre 5 y 6, ambos inclusive, se extrae de la caja B; y, si se obtuviera 7 y 8, ambos inclusive, de la caja C.

Considerando esta información:

a) Plantee cuál es la probabilidad que se tiene de escoger cada una de las cajas (1 punto).

RESOLUCIÓN

Para definir la probabilidad de cada caja, hay que relacionar la información de los valores de las tiradas, con las respectivas cajas:

$$P(A) = P(sacar\ 1\ a\ 4)$$
$$P(B) = P(sacar\ 5\ o\ 6)$$
$$P(C) = P(sacar\ 7\ u\ 8)$$

Seguidamente, es necesario definir las probabilidades de las respectivas tiradas. Se indica que se obtiene 8 en 5 de cada 8 tiradas; por lo tanto:

$$P(sacar\ 8) = \frac{5}{8}$$

Por otra parte, se indica además que el resto de números son equiprobables. Esto implica que los números del 1 al 7, ambos inclusive, tienen la misma probabilidad. Así las cosas, debe repartirse la probabilidad de no sacar 8 entre los 7 números restantes:

$$P(no\ sacar\ 8) = 1 - P(sacar\ 8) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(cualquier\ número\ del\ 1\ al\ 7) = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{56}$$

Tras esto, pueden definirse las probabilidades para cada una de las cajas:

$$P(A) = 4 \cdot \frac{3}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14} \cong 0,2143 \equiv 21,43\%$$

$$P(B) = 2 \cdot \frac{3}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \cong 0,1071 \equiv 10,71\%$$

$$P(C) = \frac{3}{56} + \frac{5}{8} = \frac{19}{28} \cong 0,6786 \equiv 67,86\%$$

CONCLUSIÓN

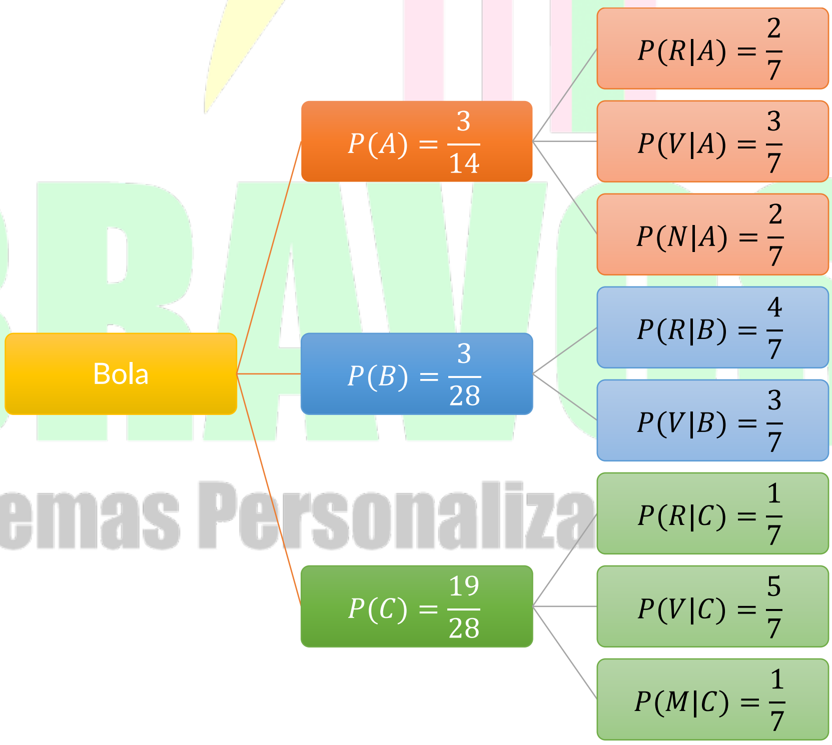
La probabilidad de la caja A es de un 21,43%, de la caja B, un 10,71%; y, de la caja C, un 67,86%, aproximadamente.

b) Calcule la probabilidad de obtener una bola roja (0,5 puntos).

RESOLUCIÓN

Para calcular la probabilidad de obtener una bola roja, es necesario recurrir al Teorema de la Probabilidad Total.

No obstante, antes de realizar el cálculo, debe definirse primeramente cuál es la probabilidad de obtener cada tipo de bola, en función de cada caja. Para ello, se recurrirá a un diagrama de árbol. Se hace referencia a que hay bolas de colores rojo (R), verde (V), negro (N) y morada (M). Es necesario considerar esta información para definir dichas probabilidades:



Ya con la información planteada, puede resolverse la probabilidad de sacar una bola roja:

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R) = P(A) \cdot P(R|A) + P(B) \cdot P(R|B) + P(C) \cdot P(R|C) =$$

$$= \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{28} \cdot \frac{4}{7} + \frac{19}{28} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{49} + \frac{3}{49} + \frac{19}{196} = \frac{43}{196} \cong 0,2194 \equiv 21,94\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de sacar una bola roja es de un 21,94%.

c) **Determine la probabilidad de que, habiéndose sacado una bola roja, venga de la caja B (0,5 puntos).**

RESOLUCIÓN

Para resolver este apartado, debe recurrirse al Teorema de Bayes. Aplicado al ejercicio, es necesario relacionar la condición impuesta (la bola es roja), con lo que se desea comprobar (que venga de la caja B):

$$P(B|R)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{P(B)\cdot P(R|B)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{28}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{43}{196}}=\frac{\frac{3}{49}}{\frac{76}{196}}=\frac{12}{43}\cong 0,2791\equiv 27,91\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que, habiéndose sacado una bola roja, venga de la caja B es de un 27,91%.

d) **Si se extrajo una bola de color morado, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la caja A?**

RESOLUCIÓN

Este apartado puede resolverse por lógica. Se sabe por los datos que la única caja que contiene bolas moradas es la caja C, por lo que es imposible que cualquiera de las otras cajas contenga bolas moradas. Así pues, probabilidad de que, si se extrajo una bola de color morada, sea de la caja A es un de 0%.